SOBRE TRIÁNGULOS DE LADOS ENTEROS

Trabajo ganador del concurso nacional de secundaria en su categoría de Bachillerato

Universidad Autónoma de Madrid

Junio de 2008

Autores:
Héctor Rosa Álvarez, 1ºBachillerato
Adrián Tamayo Domínguez, 1ºBachillerato

Tutores:
David Miguel del Río
Ángel Corral Cedena

Departamento de Matemáticas
I.E.S. Europa (Móstoles)

Sobre triángulos de lados enteros

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES 2

2.- OBJETIVOS 2

3.- DESARROLLO 2

3.1.- Nuestras fórmulas iniciales 2

3.2.- Nuestras fórmulas generales 5

3.2.1.- La primera fila subrayada a1n, b1n y c1n 7

3.2.2.- La segunda fila subrayada a2n, b2n y c2n 8

3.2.3.- Generalizando las expresiones para las series ain, bin y cin 9

3.3.- Cambiando de estrategia 10

3.3.1.- Serie cero (a0n, b0n y c0n) 10

3.3.2.- Serie 1 (a1n, b1n y c1n) 10

3.3.3.- Serie 2 (a2n, b2n y c21n) 10

3.3.4.- Generalizando para la Serie i (ain, bin y cin) 11

4.- RESULTADOS 12

5.- CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES SOBRE NUESTRO PROBLEMA 12

5.1.- Relación de triángulos enteros con área igual al perímetro 12

5.2.- Comprobación de la expresión de las soluciones 14

5.3.- Comprobando que no hay otras soluciones 14

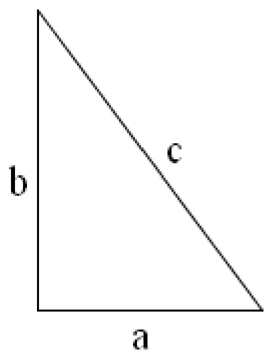
6.- BIBLIOGRAFÍA 18

Sobre triángulos de lados enteros

Resumen.- A partir de las fórmulas para encontrar todas las ternas pitagóricas desarrollaremos nuestras propias expresiones para ello y las aplicaremos a la resolución del problema planteado. Este proceso nos llevará a encontrar todas las soluciones posibles.

1.- INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Se nos plantea el siguiente problema: **¿Hallar todos los triángulos rectángulos existentes cuya área sea numéricamente igual a su perímetro y sus lados sean enteros?**



Según el enunciado tenemos que resolver la siguiente ecuación, aceptando únicamente las soluciones enteras:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a \cdot b}{2} & = & a+b+c \\ \acute{A}rea & = & Per\acute{\imath}metro \end{array} \quad \textbf{[1]}$$

Como se trata de triángulos rectángulos, sus lados van a ser ternas pitagóricas. Por ello tenemos que encontrar fórmulas que generen todas las ternas.

2.- OBJETIVOS

El principal objetivo del presente trabajo es el de aprender a desarrollar estrategias que permitan abordar problemas cuya solución no sea, en principio, fácil.

Para ello utilizaremos el método científico, la observación y la generalización de aquellas regularidades que encontremos.

Trataremos de resolver la ecuación planteada, sobre la que hemos de imponer una fuerte restricción: no vale cualquier solución. Ésta debe ser entera y cumplir la relación pitagórica.

3.- DESARROLLO

3.1.- Nuestras fórmulas iniciales

¿Cómo hallamos las fórmulas iniciales (las llamamos así porque nos darán paso a las fórmulas generales)?

Observando ternas calculadas a partir de las fórmulas obtenidas en Internet (ver Bibliografía) vamos a tratar de encontrar nuestras propias expresiones para obtener ternas pitagóricas.

Las fórmulas de Internet eran:

Catetos	$a = p^2 - q^2$	Donde: p y q son números enteros	**[2]**
	$b = 2pq$		
Hipotenusa	$c = p^2 + q^2$		

Las 10 primeras ternas a partir de las fórmulas [2] son: (3,4,5); (6,8,10)1; (5,12,13); (7,24,25); (9,40,41); (11,60,61); (13,84,85); (15,112,113); (17,144,145); (19,180,181); (21,220,221); ...

Vamos a tratar de encontrar regularidades:

1) De momento el primer número de cada una de las ternas de la serie es:

3, 6*, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...

Observamos que todos excepto el 6 son impares consecutivos y como la expresión para encontrar los números impares es: 2n +1; obtenemos:

$$\boxed{a = 2n+1} \quad [3]$$

2) El segundo número de cada una de las ternas de la serie es:

4, 8*, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, 180, 220,...

Observamos que son todos pares y además múltiplos de 4: 4 = 4·1, 12 = 4·3, 24 = 4·6, 40 = 4·10, 60 = 4·15, 84 = 4·21, 112 = 4·28, 144 = 4·36, 180 = 4·45, 220 = 4·55, ... Por lo que hicimos una tabla para obtener una fórmula que determinara cada número que multiplicaba al cuatro:

Término	$b_1=4·1$	$b_2=4·3$	$b_3=4·6$	$b_4=4·10$	$b_5=4·15$	...	$b_n=4·S_n$
Nº que multiplica	1 = 1	3 = 1+2	6 = 1+2+3	10 = 1+2+3+4	15 = 1+2+3+4+5	...	S_n = 1+2+3+…+n

Tabla 1.- Factores multiplicativos de la serie de los segundos números de las ternas

Observamos que el factor multiplicador es una sucesión aritmética, así que buscamos en los cuadernos de matemáticas de los años anteriores y encontramos la fórmula de la suma de una sucesión aritmética:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Donde: a1 es el primer término de la sucesión, a_n es el último término y n es el número de términos.

1 Esta terna es múltiplo de otra así que la vamos a ignorar de momento

* Terna múltiplo de otra

Por lo tanto, volviendo a nuestro caso: $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+n^2}{2}$

De esta forma la fórmula final es para obtener los segundos números de cada una de las ternas pitagóricas sería multiplicar por 4 la expresión de la suma: $b_n = 4 \cdot \frac{n+n^2}{2}$, es decir:

$$\boxed{\mathbf{b_n = 2n + 2n^2}} \quad \textbf{[4]}$$

3) El tercer número de cada terna pitagórica es: 5, 10*, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221,...

Observamos que todos son $b_i + 1$ (siendo i de 1 a n)

Por lo tanto la fórmula es: $\boxed{\mathbf{c_n = b_n + 1 = 2n + 2n^2 + 1}}$ **[5]**

En resumen, hemos obtenido las siguientes expresiones:

$$\boxed{\mathbf{a_n = 2n+1}} \ \textbf{[3]} \ ; \ \boxed{\mathbf{b_n = 2n + 2n^2}} \ \textbf{[4]} \ ; \ \boxed{\mathbf{c_n = 2n + 2n^2 + 1}} \ \textbf{[5]}$$

Ahora que ya tenemos unas fórmulas propias para obtener los componentes de las ternas pitagóricas procederemos a sustituirlas en la ecuación [1] que se nos plantea:

$$\begin{array}{ccc} \frac{a \cdot b}{2} & = & a+b+c \\ \text{Área} & = & \text{Perímetro} \end{array} \Rightarrow \frac{a_n \cdot b_n}{2} = a_n + b_n + c_n$$

queda:

$$\frac{(2n+1)(2n^2+2n)}{2} = (2n+1) + (2n^2+n) + (2n^2+2n+1)$$

Trabajando con esta expresión obtenemos:

$$2n^3 - n^2 - 5n - 2 = 0$$

factorizando por el método de Ruffini:

$$(n+1) \cdot (2n^2 - 3n - 2) = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\boxed{\begin{array}{c} n = 2 \\ n = -1/2 \text{ que no es aceptable} \\ n = -1 \text{ que no es aceptable} \end{array}}$$

Estos dos últimos resultados no son válidos, ya que nos darían resultados negativos y nuestros resultados deben ser enteros y positivos.

Según esto, sólo tiene el área y el perímetro iguales aquella terna pitagórica obtenida con: **n = 2** que es:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5} \\ \mathbf{b_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 12} \\ \mathbf{c_2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 13} \end{array}}$$

De esta forma, obtenemos la terna (5, 12, 13) como una primera solución de nuestro problema.

A continuación, nos dimos cuenta de que existían más ternas posibles, múltiplos de las ya obtenidas, y en las que también podría existir solución a nuestro problema. Seguimos el siguiente procedimiento, sustituyendo en la ecuación [1], en el que ***k*** será un número entero que multiplique a las ternas anteriormente obtenidas en las expresiones [3], [4] y [5]:

$$\frac{k\cdot a_n \cdot k\cdot b_n}{2} = k\cdot(a_n + b_n + c_n)$$

$$\frac{k^2\cdot(2n+1)\cdot(2n^2+2n)}{2} = k\cdot((2n+1)+(2n^2+2n)\cdot(2n^2+2n+1))$$

$$\frac{k^2\cdot(4n^3+6n^2+2n)}{2} = k\cdot(4n^2+6n+2) \quad ; \quad \mathrm{k}^2\cdot(2\mathrm{n}^3+3\mathrm{n}^2+\mathrm{n}) = \mathrm{k}\cdot(4\mathrm{n}^2+6\mathrm{n}+2)$$

$$\frac{k^2}{k}(2n^3+3n^2+n) = 4n^2+6n+2 \;\; ; \;\; k(2n^3+3n^2+n) = 4n^2+6n+2 \quad ;$$

$$k = \frac{4n^2+6n+2}{2n^3+3n^2+n} ; k = \frac{2\cdot(2n^2+3n+1)}{n\cdot(2n^2+3n+1)}$$

De donde: $\boxed{k = \frac{2}{n} \Rightarrow k\cdot n = 2}$

Para esta expresión de k existen dos posibles soluciones enteras: 1.- k = 1, n = 2 → (5, 12, 13), solución que ya conocíamos 2.- k = 2, n = 1 → (6, 8, 10), nueva solución

COMPROBACIÓN:

- (5, 12, 13): Área = $\frac{a\cdot b}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30$; Perímetro = a + b + c = 5 + 12 + 13 = 30
- (6, 8, 10): Área = $\frac{a\cdot b}{2} = \frac{6\cdot 8}{2} = 24$; Perímetro = a + b + c = 6 + 8 + 10 = 24

3.2.- Nuestras fórmulas generales

Nuestro profesor nos advirtió que existían ternas pitagóricas (obtenidas de las fórmulas de Internet) que no se calculaban con nuestras fórmulas **[3], [4] y [5]**, ya que, en los cuadros siguientes, sólo calculaban la primera "fila", es decir, las filas en negrita. En cambio para calcular las filas subrayadas habría que utilizar otras expresiones.

Las filas en cursiva son meros múltiplos de las que están en negrita.

Por tanto, ¿cómo hallamos el resto de ternas pitagóricas (las subrayadas)?

Vamos a generar tablas de ternas utilizando las fórmulas halladas en Internet (fórmulas[2]) haciendo variar el valor de los parámetros p y q (números enteros positivos).

		a	b	c

		a	b	c

p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
2(n=1)	1	**3**	**4**	**5**
3	1	*8*	*6*	*10*
4(n=2)	1	$\underline{a1_1=15}$	$\underline{b1_1=8}$	$\underline{c1_1=17}$
5	1	*24*	*10*	*26*
6(n=3)	1	$\underline{a2_1=35}$	$\underline{b2_1=12}$	$\underline{c2_1=37}$
7	1	*48*	*14*	*50*
8(n=4)	1	$\underline{a3_1=63}$	$\underline{b3_1=16}$	$\underline{c3_1=65}$
9	1	*80*	*18*	*82*
10(n=5)	1	$\underline{a4_1=99}$	$\underline{b4_1=20}$	$\underline{c4_1=101}$
11	1	*120*	*22*	*122*
12(n=6)	1	$\underline{a5_1=43}$	$\underline{b5_1=24}$	$\underline{c5_1=145}$
13	1	*168*	*26*	*170*
14(n=7)	1	$\underline{a6_1=195}$	$\underline{b6_1=28}$	$\underline{c6_1=197}$

p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
3	2	**5**	**12**	**13**
4	2	*12*	*16*	*20*
5	2	$\underline{a1_2=21}$	$\underline{b1_2=20}$	$\underline{c1_2=29}$
6	2	*32*	*24*	*40*
7	2	$\underline{a2_2=45}$	$\underline{b2_2=28}$	$\underline{c2_2=53}$
8	2	*60*	*32*	*68*
9	2	$\underline{a3_2=77}$	$\underline{b3_2=36}$	$\underline{c3_2=85}$
10	2	*96*	*40*	*104*
11	2	$\underline{a4_2=117}$	$\underline{b4_2=44}$	$\underline{c4_2=125}$
12	2	*140*	*48*	*148*
13	2	$\underline{a5_2=165}$	$\underline{b5_2=52}$	$\underline{c5_2=173}$
14	2	*192*	*56*	*200*

Tabla 2.- Ternas pitagóricas para q=1 y q=2

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
4	3	**7**	**24**	**25**
5	3	*16*	*30*	*34*
6	3	$\underline{a1_3=27}$	$\underline{b1_3=36}$	$\underline{c1_3=45}$
7	3	*40*	*42*	*58*
8	3	$\underline{a2_3=55}$	$\underline{b2_3=48}$	$\underline{c2_3=73}$
9	3	*72*	*54*	*90*
10	3	$\underline{a3_3=91}$	$\underline{b3_3=60}$	$\underline{c3_3=109}$
11	3	*112*	*66*	*130*
12	3	$\underline{a4_3=135}$	$\underline{b4_3=72}$	$\underline{c4_3=153}$
13	3	*160*	*78*	*178*
14	3	$\underline{a5_3=187}$	$\underline{b5_3=84}$	$\underline{c5_3=205}$
15	3	*216*	*90*	*234*
16	3	$\underline{a6_3=247}$	$\underline{b6_3=96}$	$\underline{c6_3=265}$

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
5	4	**9**	**40**	**41**
6	4	*20*	*48*	*52*
7	4	$\underline{a1_4=33}$	$\underline{b1_4=56}$	$\underline{c1_4=65}$
8	4	*48*	*64*	*80*
9	4	$\underline{a2_4=65}$	$\underline{b2_4=72}$	$\underline{c2_4=97}$
10	4	*84*	*80*	*116*
11	4	$\underline{a3_4=105}$	$\underline{b3_4=88}$	$\underline{c3_4=137}$
12	4	*128*	*96*	*160*
13	4	$\underline{a4_4=153}$	$\underline{b4_4=104}$	$\underline{c4_4=185}$
14	4	*180*	*112*	*212*
15	4	$\underline{a5_4=209}$	$\underline{b5_4=120}$	$\underline{c5_4=241}$
16	4	*240*	*128*	*272*
17	4	$\underline{a6_4=273}$	$\underline{b6_4=136}$	$\underline{c6_4=305}$

Tabla 3.- Ternas pitagóricas para q=3 y q=4

		a	b	c
p	q	p^2-q^2	2pq	p^2+q^2
6	5	**11**	**60**	**61**
7	5	*24*	*70*	*74*
8	5	$\underline{a1_5=39}$	$\underline{b1_5=80}$	$\underline{c1_5=89}$
9	5	*56*	*90*	*106*
10	5	$\underline{a2_5=75}$	$\underline{b2_5=100}$	$\underline{c2_5=125}$
11	5	*96*	*110*	*146*
12	5	$\underline{a3_5=119}$	$\underline{b3_5=120}$	$\underline{c3_5=169}$
13	5	*144*	*130*	*194*
14	5	$\underline{a4_5=171}$	$\underline{b4_5=140}$	$\underline{c4_5=221}$
15	5	*200*	*150*	*250*
16	5	$\underline{a5_5=231}$	$\underline{b5_5=160}$	$\underline{c5_5=281}$
17	5	*264*	*170*	*314*
18	5	$\underline{a6_5=299}$	$\underline{b6_5=180}$	$\underline{c6_5=349}$

Tabla 4.- Ternas pitagóricas para q=5

3.2.1.- La primera fila subrayada $a1_n$, $b1_n$ y $c1_n$

Para calcular la primera fila subrayada en cada tabla, esto es:

(15, 8, 17); (21, 20, 29); (27, 36, 45); (33, 56, 65); (39, 80, 89); ... (será la serie 1, $a1_n$, $b1_n$ y $c1_n$)

utilizaremos fórmulas obtenidas de la misma manera que antes, es decir observando regularidades:

1) El primer número de cada terna de la serie 1 es $a1_n$: 15, 21, 27, 33, 39,...

Observamos que son todos múltiplos de 3:

$15 = 3\cdot5$, $21 = 3\cdot7$, $27 = 3\cdot9$, $33 = 3\cdot11$, $39 = 3\cdot13$ ...

por lo que habría que encontrar una expresión para calcular los factores multiplicativos 5, 7, 9, 11, 13… Esa fórmula sería: 2(n-1)+5; pues, 2(n-1) encuentra todos los números impares necesarios para nuestras ternas al sumarle el primer número de la serie, es decir 5.

Simplificada, esta fórmula sería $a1_n = 6n + 9$ (nos interesa la fórmula sin simplificar, pues nos ayudará a encontrar regularidades a la hora de obtener las fórmulas generales).

Simplificada quedaría:

$$\boxed{\mathbf{a1_n = 2n + 3}} \quad \textbf{[6]}$$

2) El segundo número de cada terna de la serie 1 es $b1_n$: 8, 20, 36, 56, 80,...

Observamos que son todos múltiplos de 4 e hicimos una tabla para analizar mejor estos datos:

Términos de la serie, $b1_n$	$b1_1=8$	,	$b1_2=20$	,	$b1_3=36$	,	$b1_4=56$	,	$b1_5=80$
Diferencia entre los términos, d_n		$+12=3\cdot4$		$+16=4\cdot4$		$+20=5\cdot4$		$+24=6\cdot4$	

Tabla 5.- Obtención de los segundos términos de las ternas pitagóricas de la serie 1

Al hacer esto encontramos la siguiente fórmula para hallar los términos de la sucesión de las diferencias $d_n = 4(n+1)$

De esta forma podemos expresar cada término b_n como el resultado de la suma de los términos d_i desde i=1 hasta n. Así, utilizando la suma de la progresión aritmética:

$$b1_n = \sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{d_1 + d_n}{2} n$$

donde: $d_1 = 8$ y $d_n = 4(n+1)$.

Obtenemos:

$$b1_n = \frac{8 + 4(n+1)}{2} n$$

Desarrollando queda:

$$\boxed{\mathbf{b1_n = 2n^2 + 6n}} \quad \textbf{[7]}$$

3) El tercer número de cada terna de la serie 1 es $c1_n$: 17, 29, 45, 65, 89,...

Procedemos de forma similar al caso anterior para buscar regularidades: concordancia

Términos de la serie, $c1_n$	$c1_1$=17	,	$c1_2$=29	,	$c1_3$=45	,	$c1_4$=69	,	$c1_5$=89
Diferencia entre los términos, d_n		+12=3·4		+16=4·4		+20=5·4		+24=6·4	

Tabla 6.- Obtención de los terceros términos de las ternas pitagóricas

Al hacer esto encontramos la siguiente fórmula para hallar los términos de la sucesión de las diferencias $d_n = 4(n+2)$, similar a lo que ocurría en el caso anterior.

De esta forma:

$$c1_n = 17 + \sum_{i=1}^{n} d_i$$

y, utilizando la suma de la progresión aritmética, obtenemos:

$$c1_n = 17 + \frac{12 + 4(n+2)}{2} n$$

Operando queda:

$$c1_n = 2n^2+10n+17$$

Si calculamos, veremos que sólo podemos calcular el primer término, 17, si sustituimos n por 0, pero como se trata del primer término, nos interesa que n sea 1. Para ello, cambiamos la n de la fórmula obtenida por n-1 y calculamos (este paso nos será de gran importancia más adelante):

$$c1_n = 2(n-1)^2 + 10(n-1) + 17$$

Finalmente obtenemos la siguiente fórmula:

$$\boxed{c1_n = 2n^2 + 6n + 9} \quad [8]$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes expresiones para las ternas de la serie 1 (primera fila subrayada):

$$\boxed{a1_n = 2n + 3}\ [6]\ ;\ \boxed{b1_n = 2n^2 + 6n}\ [7];\ \boxed{c1_n = 2n^2 + 6n + 9}\quad [8]$$

3.2.2.- La segunda fila subrayada $a2_n$, $b2_n$ y $c2_n$

Para calcular la segunda fila subrayada, es decir: (35, 12, 37); (45, 28, 53); (55, 48, 73); (65, 72, 97),... utilizaremos fórmulas obtenidas de la misma manera que antes.

1) El primer número de cada terna de la serie 2 es $a2_n$: 35, 45, 55, 65...
Observamos que van de 10 en 10 a partir de 35; por lo tanto, su fórmula es:

$$a2_n = 10(n-1) + 35$$

La expresión simplificada es:

$$\boxed{a2_n = 10n + 25} \quad [9]$$

2) Actuando de forma similar para el segundo número de la terna de la serie 2, $b2_n$ encontramos:

$$\boxed{b2_n = 2n^2 + 10n} \quad [10]$$

3) Actuando de forma similar para el tercer número de la terna de la serie 3, $c2_n$ encontramos:

$$\boxed{\mathbf{c2_n = 2n^2 + 10n + 25}} \quad \mathbf{[11]}$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes expresiones para las ternas de la serie 2 (segunda fila subrayada):

$$\boxed{\mathbf{a2_n = 10n + 25}} \quad \mathbf{[9];} \quad \boxed{\mathbf{b2_n = 2n^2 + 10n}} \quad \mathbf{[10];} \boxed{\mathbf{c2_n = 2n^2 + 10n + 25}} \quad \mathbf{[11]}$$

3.2.3.- Generalizando las expresiones para las series ai_n, bi_n y ci_n

Vamos a recoger los resultados obtenidos en una tabla. A la serie de la primera fila (en negrita) la llamaremos serie 0 ($a0_n$, $b0_n$ y $c0_n$). Observando las expresiones encontraremos unas fórmulas generales para todas las series de las tablas 2, 3 y 4:

1ª fila (en negrita). Serie 0:	$a0_n=2n+1= (2\cdot1)n + 1^2$	$b0_n=2n^2+2n=2n^2+(2\cdot1)n$	$c0_n=2n^2+2n+1=b0_n+1$
2ª fila (1ª subrayada). Serie 1	$a1_n=6n+9= (2\cdot3)n + 3^2$	$b1_n=2n^2+6n=2n^2+(2\cdot3)n$	$c1_n=2n^2+6n+9=b1_n+9$
3ª fila (2ª subrayada). Serie 2	$a2_n=10n+25=(2\cdot5)n+5^2$	$b2_n=2n^2+10n=2n^2+(2\cdot5)n$	$c2_n=2n^2+10n+25=b2_n+25$
...	...	...	...
q-ésima fila. Serie i	$aq_n=[2(2q-1)]n+(2q-1)^2$	$bq_n = 2n^2 + [2(2q-1)]n$	$cq_n=2n^2+[2(2q-1)]n+(2q-1)^2$

Tabla 7.- Obtención de los terceros términos generales de las ternas pitagóricas

Observando estas últimas expresiones nos damos cuenta de que todas las fórmulas conseguidas tenían una relación. Operando en las expresiones aq_n, bq_n y cq_n de la tabla 7 obtenemos:

$$aq_n = 4\cdot q\cdot n - 2n + 4q^2 – 4q + 1$$
$$bq_n = 2n^2 + 4\cdot q\cdot n – 2n$$
$$c_n = 2n^2 + 4\cdot q\cdot n - 2n + 4q^2 – 4q + 1$$

donde q es el número de la serie de las ternas (tablas 2, 3 y 4) y n es la terna pitagórica n-ésima de la serie q-ésima.

Finalmente multiplicaremos por k, número entero positivo, para obtener también todos los múltiplos y así, todas las ternas posibles:

$$\boxed{\mathbf{aq_n = k\cdot(4\cdot q\cdot n - 2n + 4q^2 – 4q + 1)...}} \quad \mathbf{[12]}$$

$$\boxed{\mathbf{bq_n = k\cdot(2n^2 + 4\cdot q\cdot n - 2n)}} \quad \mathbf{[13]}$$

$$\boxed{\mathbf{cq_n = k\cdot(2n^2 + 4\cdot q\cdot n - 2n + 4q^2 – 4q + 1)}} \quad \mathbf{[14]}$$

Una vez tenemos las fórmulas generales [12], [13] y [14], las sustituiremos en [1], condición del problema, con idea de obtener todas las soluciones posibles.

Sin embargo, a medida que íbamos avanzando en nuestra investigación con estas expresiones ([12,13,14]), nos dimos cuenta de que no llegábamos a ningún polinomio sencillo, ya que el que obtuvimos no nos permitía trabajar por su complejidad.

3.3.- Cambiando de estrategia

Dado que manejar las expresiones [12,13,14] resultaba demasiado complejo, decidimos tomar otra alternativa para encontrar la solución. En lugar de las fórmulas generales [12,13,14], utilizaríamos las fórmulas particulares de cada serie, que aparecen en la tabla 7.

3.3.1.- Serie cero ($a0_n$, $b0_n$ y $c0_n$)

Esta serie se resolvió en el apartado 2. Las soluciones aparecen en el cuadro 1.

3.3.2.- Serie 1 ($a1_n$, $b1_n$ y $c1_n$)

Habíamos obtenido las relaciones:

$a1_n = k(6n+9)$ $\quad$ $b1_n = k(2n^2+ 6n)$ $\quad$ $c1_n = k(2n^2+6n+9)$

donde k es un número entero positivo y n es término n-ésimo de la serie 1.

Sustituyendo en la condición [1]:

$$\frac{a1_n \cdot b1_n}{2} = a1_n + b1_n + c1_n$$

desarrollando:

$$\frac{k^2(6n+9)(2n^2+6n)}{2} = k(6n+9) + k(2n^2+6n) + k(2n^2+6n+9)$$

$$\frac{k^2(12n^3+54n^2+54n)}{2} = k(4n^2+18n+18)$$

$$k(6n^3+27n^2+27n) = 4n^2+18n+18$$

$$k \cdot 3n(2n^2+9n+9) = 2(2n^2+9n+9)$$

queda:

$$k \cdot 3n = 2 \quad \textbf{[15]}$$

Según esto, k·n = 2/3, por lo que para que k ó n sean enteros, uno de los dos debe ser fraccionario, ya que el número entero será 1 ó 2 y el número fraccionario será 2/3 ó 1/3 respectivamente. De esta manera, llegamos a la conclusión de que en la segunda fila no existe una solución entera.

3.3.3.- Serie 2 ($a2_n$, $b2_n$ y $c21_n$)

Habíamos obtenido las relaciones:

$a2_n = k(10n+25)$ $\quad$ $b2_n = k(2n^2+10n)$ $\quad$ $c2_n = k(2n^2+10n+25)$

donde k es un número entero positivo y n es término n-ésimo de la serie 2.

Sustituyendo en la condición [1]:

$$\frac{a2_n b2_n}{2} = a2_n + b2_n + c2_n$$

desarrollando:

$$\frac{k^2(10n+25)(2n^2+10n)}{2} = k(10n+25) + k(2n^2+10n) + k(2n^2+10n+25)$$

$$\frac{k^2\left(20n^3+150n^2+250n\right)}{2}=k\left(4n^2+30n+50\right)$$

$$k\left(10n^3+75n^2+125n\right)=4n^2+30n+50$$

$$k\cdot 5n\left(2n^2+15n+25\right)=2\left(2n^2+15n+25\right)$$

queda

$$k\cdot 5n=2 \quad \textbf{[16]}$$

Observando las expresiones [15] y [16] vemos que podemos generalizar los resultados para todas las series de las tablas 3, 4 y 5.

3.3.4.- Generalizando para la Serie i (ai_n, bi_n y ci_n)

Vamos a recoger en una tabla las expresiones halladas. Para las filas ver las tablas 3,4 y 5.

	Expresión resultante	Soluciones aceptables
1ª fila de ternas. Serie 0	k·n = 2	k = 1, n = 2 → (5, 12, 13) k = 2, n = 1 → (6, 8, 10)
2ª fila de ternas. Serie 1	k·3n = 2	Ninguna
3ª fila de ternas. Serie 2	k·5n = 2	Ninguna
...	...	...
q-ésima fila de ternas. Serie q-1	k(2q – 1) n = 2	

Tabla 8 .- Generalización de las expresiones resultantes para cada serie

Observamos que nada cambia excepto los números que multiplican a la n, que son impares consecutivos. De esta manera concluimos que:

$$k\left(2q-1\right)n=2$$

queda:

$$\boxed{k\cdot n=\frac{2}{2q-1}} \quad \textbf{[17]}$$

En la expresión [17], para que k·n sea un número entero 2q – 1 tiene que ser igual a 1 ó 2, por lo que:

a) 2q – 1 = 1→ q = 1
b) 2q – 1 = 2 → q = 3/2, lo que no tiene sentido porque q es un número entero positivo.

Si q = 1, entonces k·n = 2; por ello, los valores de k y n serán: k = 1; n = 2 ó k = 2; n = 1

Finalmente, sustituyendo k, q y n en las fórmulas generales [12], [13] y [14], obtuvimos como resultado a nuestro problema sólo 3 soluciones:

- si q = 1:
  - k = 1, n = 2 → Terna pitagórica: a = 5; b = 12; c = 13
    Área = 30; Perímetro = 30
  - k = 2, n = 1 → Terna pitagórica: a = 6; b = 8; c = 10
    Área = 24; Perímetro = 24

Como se puede observar sólo existen dos soluciones, que son:

Triángulo de lados: 5, 12, 13 Triángulo de lados: 6, 8, 10

Soluciones que ya habíamos obtenido anteriormente en el apartado 2.

4.- RESULTADOS

A partir de expresiones desarrolladas por nosotros para generar todas las ternas pitagóricas hemos encontrado las siguientes soluciones para nuestro problema:

Triángulo de lados: 5, 12, 13 Triángulo de lados: 6, 8, 10

Estos dos triángulos rectángulos cumplen la condición de que, numéricamente, su área vale lo mismo que su perímetro.

Más adelante demostraremos que son las únicas soluciones posibles.

5.- CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES SOBRE NUESTRO PROBLEMA

5.1.- Relación de triángulos enteros con área igual al perímetro

Vamos tratar de obtener una relación que deban cumplir los triángulos rectángulos de lados enteros cuya área valga, numéricamente, lo mismo que su perímetro. Para ello sustituimos con ayuda del teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} \dfrac{a\cdot b}{2} = a+b+c \\ c^2 = a^2+b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \dfrac{a\cdot b}{2} - a - b \\ c = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \qquad \rightarrow \quad \frac{a\cdot b - 2a - 2b}{2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left(\frac{a\cdot b - (2a+2b)}{2}\right)^2 = a^2+b^2;$$

$$\frac{a^2\cdot b^2 - 2ab(2a+2b) + (2a+2b)^2}{4} = a^2+b^2$$

$$\frac{a^2\cdot b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 4a^2 + 8ab + 4b^2}{4} = a^2+b^2$$

$$a^2\cdot b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 4a^2 + 8ab + 4b^2 = 4a^2 + 4b^2$$

$$a^2\cdot b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab = 0$$

$$ab(ab - 4a - 4a + 8) = 0$$

$$\frac{ab}{4}-a-b+2=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{2}-a-b+2=0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)-a-b+2=0$$

$$\frac{a+b+c-2a-2b+4}{2}=0$$

$$\frac{-a-b+c+4}{2}=0$$

$$-a-b+c+4=0$$

Obtenemos la siguiente relación:

$$\boxed{a+b-c=4} \quad [18]$$

Vamos a comprobar si las soluciones halladas cumplen la relación [18]:

1) Solución 1: a = 5, b = 12, c = 13 de donde: a + b - c = 4 y 5 +12 -13 = 4, como queríamos comprobar.

2) Solución 2: a = 6, b = 8, c = 10 de donde: a + b - c = 4 y 6 + 8 - 10 = 4, como queríamos comprobar.

Sin embargo, hay infinitos casos en los que esta igualdad se cumple, pero no son soluciones a nuestro problema, por ello esta fórmula no nos permite buscar más soluciones, ya que, según nuestras investigaciones, no las hay. Esta fórmula sólo nos permitiría comprobar que nuestras soluciones son válidas, pues en ambas se cumple que a + b – c = 4.

Conclusión1:
Así podemos concluir que si abc es un triángulo rectángulo de catetos a y b enteros e hipotenusa c entera, y numéricamente su área vale lo mismo que su perímetro, entonces cumplirá que a + b – c = 4, lo que no es cierto en sentido contrario.

5.2.- Comprobación de la expresión de las soluciones

A partir de la fórmula [18] sustituimos a, b y c por las fórmulas generales [12], [13] y [14]. Con esto esperamos llegar a la expresión [17] que nos llevó a las soluciones del problema:

$$\begin{cases} a+b-c=4 \\ \mathrm{a} = \mathrm{k}(4\mathrm{qn} - 2\mathrm{n} + 4\mathrm{q}^2 - 4\mathrm{q} + 1) \\ \mathrm{b} = k(2\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{qn} - 2\mathrm{n}) \\ \mathrm{c} = \mathrm{k}(2\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{qn} - 2\mathrm{n} + 4\mathrm{q}^2 - 4\mathrm{q} + 1) \end{cases}$$

Sustituyendo y operando:

$$k(4qn - 2n + 4q^2 - 4q + 1) + k(2n2 + 4qn - 2n) - k(2n^2 + 4qn - 2n + 4q^2 - 4q + 1) = 4$$

$$k(4qn - 2n + 4q^2 - 4q + 1 + 2n^2 + 4qn - 2n - 2n^2 + 4qn - 2n + 4q^2 - 4q + 1) = 4$$

$$k(4qn - 2n) = 4$$

$$2kn(2q - 1) = 4 \; ;$$

queda:

$$k \cdot n = \frac{2}{2q-1}$$

que es la ecuación [17], como queríamos comprobar.

5.3.- Comprobando que no hay otras soluciones

A continuación, adjuntaremos unas gráficas realizadas utilizando las fórmulas [2], obtenidas en Internet, y que sabemos que son válidas, a las que aplicaremos la restricción de nuestro problema, dando de esta forma solidez a nuestras soluciones:

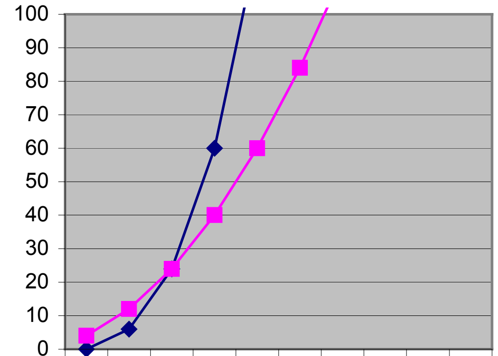
Catetos	$a = p^2 - q^2$	Donde: p y q son números enteros	**[2]**
	$b = 2pq$		
Hipotenusa	$c = p^2 + q^2$		

Utilizando estas expresiones calculamos la fórmula del área y del perímetro del triángulo en función de los parámetros p y q de las expresiones [2]:

$$A(p,q) = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(p^2 - q^2)2pq}{2} = p^3 q - pq^3 \quad [19]$$

$$P(p,q) = (p^2 - q^2) + (2pq) + (p^2 + q^2) = 2p^2 + 2pq \quad [20]$$

Vamos a realizar diferentes representaciones, fijando el valor de q, de A(p,q) *vs* p y de P(p,q) *vs* p, de forma que si ambas curvas se cortan en un valor exacto habremos encontrado una solución a nuestro problema.



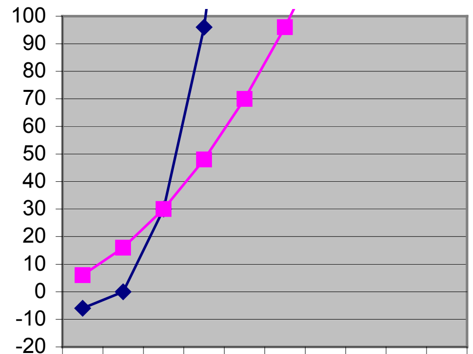
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	0	6	24	60	120	210	336	504	720	990
Perímetro	4	12	24	40	60	84	112	144	180	220

Gráfica de área y perímetro para q = 1 frente a p

1) Si q = 1, entonces
$A(p,1) = p^3 – p$
$P(p,1) = 2p^2 + 2p$

Ambas gráficas se cortan en el mismo valor: punto de corte (3,24), es decir, para p = 3 (y q = 1 que estaba fijo) el área y el perímetro coinciden en valor. Se trata, por lo tanto, de la terna (6,8,10), solución ya conocida por nosotros.

A medida que crecen las gráficas (una cúbica y una parábola) observamos como ambas divergen, por lo que no se volverán a cruzar.



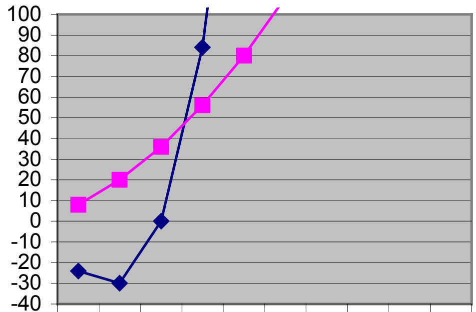
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-6	0	30	96	210	384	630	960	138	192
Perímetro	6	16	30	48	70	96	126	160	198	240

Gráfica de área y perímetro para q = 2 frente a p

2) Si q = 2, entonces
$A(p,2) = 2p^3 – 8p$
$P(p,2) = 2p^2 + 4p$

Ambas gráficas se cortan en el mismo valor: punto de corte (3,30), es decir, para p = 3 (y q = 2 que estaba fijo) el área y el perímetro coinciden en valor. Se trata, por lo tanto, de la terna (5,12,13), solución ya conocida por nosotros.

A medida que crecen las gráficas (una cúbica y una parábola) observamos como ambas divergen, por lo que no se volverán a cruzar.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-24	-30	0	84	240	486	840	132	194	273
Perímetro	8	20	36	56	80	108	140	176	216	260

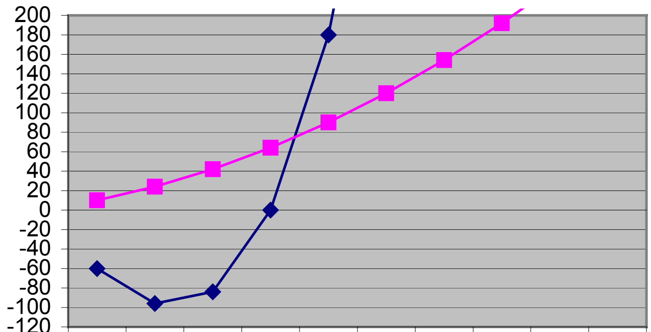
Gráfica de área y perímetro para q = 3 frente a p

3) Si q = 3, entonces
$A(p,3) = 3p^3 - 27p$
$P(p,3) = 2p^2 + 6p$

Ambas gráficas se cortan en un valor no entero, por lo que no es una solución válida a nuestro problema.

A medida que crecen las gráficas (una cúbica y una parábola) observamos como ambas divergen, por lo que no se volverán a cruzar.

4) Si q = 4: Gráfica de área y perímetro para q = 4 frente a p

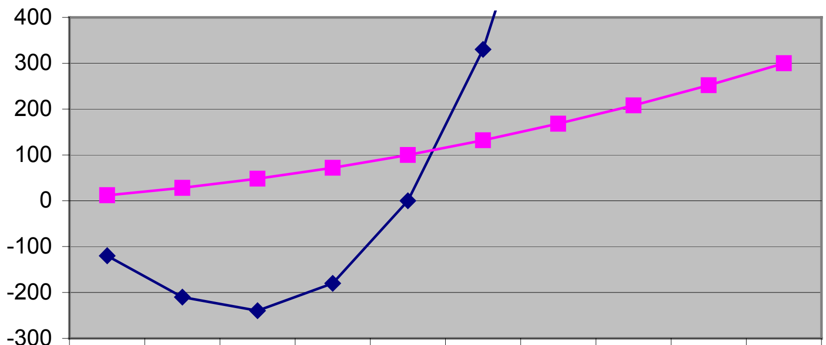


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-60	-96	-84	0	180	480	924	1536	2340	3360
Perímetro	10	24	42	64	90	120	154	192	234	280

Una vez que el área empieza a ser positiva el cruce entre ambas gráficas ya se ha producido, por lo que ya no se volverán a cruzar, pues los valores de área y perímetro divergen.

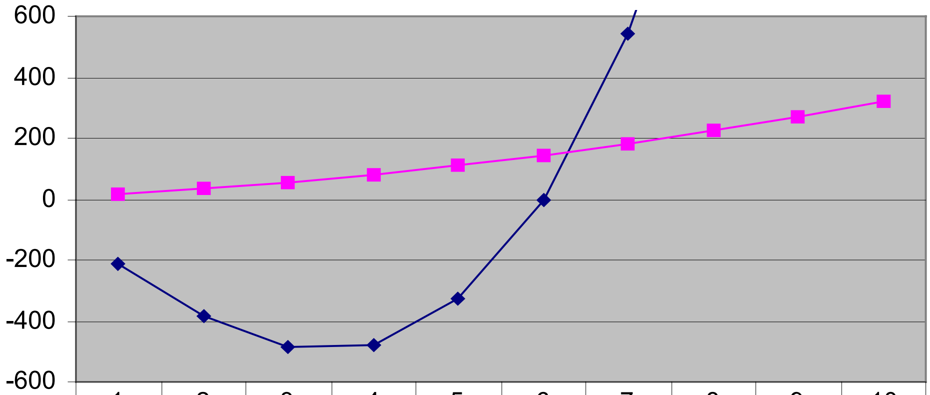
Esto se puede ver, también, en las siguientes representaciones para otros valores de q.

5) Si q = 5: Gráfica de área y perímetro para q = 5 frente a p



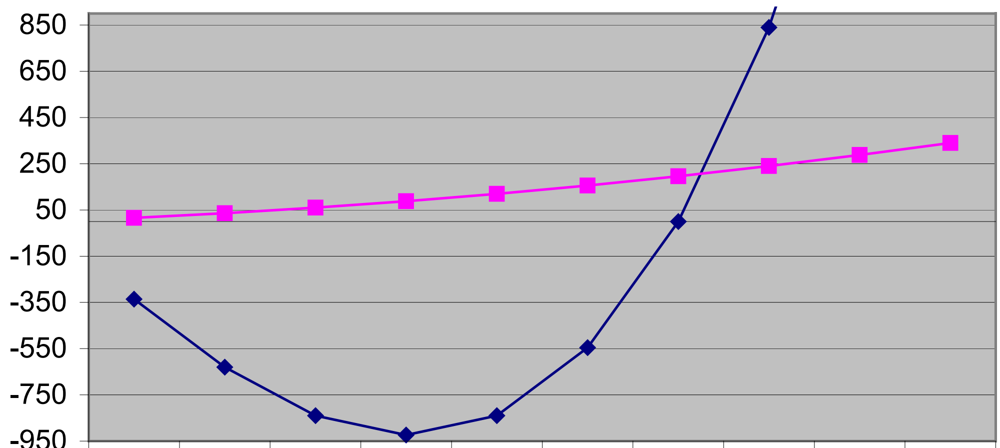
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-120	-210	-240	-180	0	330	840	1560	2520	3750
Perímetro	12	28	48	72	100	132	168	208	252	300

6) Si q = 6: Gráfica de área y perímetro para q = 6 frente a p



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-210	-384	-486	-480	-330	0	546	1344	2430	3840
Perímetro	14	32	54	80	110	144	182	224	270	320

7) q = 7: Gráfica de área y perímetro para q = 7 frente a p



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Area	-336	-630	-840	-924	-840	-546	0	840	2016	3570
Perímetro	16	36	60	88	120	156	196	240	288	340

Al analizar las tablas de valores de la gráficas podemos ver que:

1) el área es nula cuando p = q
2) el área empieza a ser positiva cuando p = q + 1
3) observamos que en las últimas 5 gráficas las curvas se cortan en valores no exactos ¿será ya siempre así? Para contestar a esto podemos trabajar en la fórmula del área y del perímetro. Resumimos lo realizado en la siguiente tabla:

Si p = q	Si p = q + 1
$A(p,q) = p^3q - pq^3 \rightarrow A(q,q) = 0$	$A(q+1,q) = q(2q^2 + 3q + 1)$
$P(p,q) = 2p^2 + 2pq \rightarrow P(q,q) = 4q^2$	$P(q+1,q) = 2(2q^2 + 3q + 1)$
Luego, si p = q, A(q,q)<P(q,q)	Luego A(q+1,q)>P(q+1,q) si q>2

Por lo tanto entre p=q y p=q+1 se ha producido el corte de las curvas si q>2. Esto significa que se han cortado en un valor no entero.

Conclusión 2

Esta última demostración permite confirmar que los únicos puntos de cruce exactos se corresponden con $q \leq 2$, es decir, con q=1 y q=2, no siendo posible un cruce exacto para q>2. Por ello no es posible encontrar otras soluciones distintas a las halladas por nosotros.

6.- BIBLIOGRAFÍA

1) http://gaussianos.com/como-contruir-triangulos-pitagoricos