Dame tres restos y te diré el número

I.E.S. Europa (Móstoles)

Autores:

Diana Barrio Luquero (4sA)
Héctor Rosa Álvarez (4sA)
Adrián Tamayo Domínguez (4sA)

Tutores:

David Miguel del Río
Ángel Corral Cedeña

Índice

Página

1. Introducción y antecedentes

Nos planteamos el siguiente problema:

"Si nos facilitan los restos entre 7, 11 y 13 de un número desconocido comprendido entre 1 y 1000. ¿Podremos determinar ese número desconocido?"

Estamos acostumbrados a utilizar la división como herramienta en las múltiples áreas en las que se nos está formando, sin embargo de ella únicamente valoramos el cociente como transmisor de la información que buscamos. De hecho en muy raras ocasiones utilizamos el resto y en muchas menos hacemos lo que se conoce como *división entera*.

2. Objetivos

El principal objetivo del presente trabajo es el de aprender a desarrollar estrategias que permitan abordar problemas cuya solución no sea, en principio, fácil.

Para ello utilizaremos el método científico, la observación y la generalización de aquellas regularidades que encontremos.

Otro objetivo es el de aprender a obtener información del resto de la división entera, dándonos cuenta de que, en este problema, el cociente ni es conocido, ni es necesario para resolver el problema.

3. Desarrollo

Desde el principio comenzamos estudiando un problema que el profesor nos propuso en clase, el cual, consistía en hacer unas divisiones entre los números 7, 11 y 13; de esas divisiones teníamos que fijarnos en el resto y así averiguar el dividendo.

En seguida, nos dimos cuenta de que el mínimo común múltiplo (en adelante m.c.m.) de 7, 11 y 13 es 1001. Así, averiguamos que el problema se nos planteaba entre 1 y 1000, porque a partir de 1001 se repetían las series de restos que están representadas en las tablas. Este caso también se aplica a cualquier conjunto de divisores.

Para ello empezamos elaborando una serie de tablas en las que nosotros hicimos pruebas, poniendo los dividendos y haciendo las divisiones para saber los restos. Además cogimos divisores más pequeños de 7, 11 y 13 para hacer que el trabajo fuera más fácil, por ejemplo:

	RESTOS ENTRE 2	RESTOS ENTRE 3
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2
6	0	0
7	1	1
8	0	2
9	1	0

	RESTOS ENTRE 4	RESTOS ENTRE 6	RESTOS ENTRE 8
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	0	4	4
5	1	5	5
6	2	0	6
7	3	1	7
8	0	2	0
9	1	3	1
10	2	4	2
11	3	5	3
12	0	0	4
13	1	1	5
14	2	2	6
15	3	3	7
16	0	4	0
17	1	5	1
18	2	0	2
19	3	1	3
20	0	2	4
21	1	3	5
22	2	4	6
23	3	5	7
24	0	0	0
25	1	1	1
26	2	2	2
27	3	3	3
28	0	4	4
29	1	5	5
30	2	0	6

Como conclusión a estas tablas pudimos determinar que los números de los restos formaban un ciclo hasta el número anterior del m.c.m. de los divisores ya que, después de ese número, la serie se repite.

También, observando estas tablas, conjeturamos que si dos de los tres restos que se nos daban eran ceros, el dividendo era igual al m. c. m. del resto entero y los divisores que tenían ese resto cero, por ejemplo:

	RESTOS DE **4**	RESTOS DE **6**	RESTOS DE **8**
12	0	0	**4**

(El m.c.m. de **4**, **6** y **4** es 12)

Más tarde nos dimos cuenta de que no era cierto ya que no se cumplía en otros casos, por ejemplo:

	RESTOS DE **2**	RESTOS DE **3**	RESTOS DE 7
18	0	0	**4**

(El m.c.m. de **2**, **3** y **4** no es 18 sino **12**)

Nos ayudó un problema de investigación del libro de texto, que consistía en averiguar un dividendo común desconocido que al operarlo con cada uno de los divisores que te daba (2, 3, 4, 5 y 6) obtenías un resto que equivalía al consecutivo anterior de cada uno de los divisores. Vamos a mostrar el ejercicio en cuestión:

Si mido un rollo de cuerda de dos en dos metros me sobra uno. Si lo mido de tres en tres me sobran dos, si lo mido de cuatro en cuatro me sobran tres, si lo hago de cinco en cinco me sobran cuatro y si lo hago de seis en seis me sobran cinco.
Sabiendo que tiene menos de cien metros, ¿podrías decirme su longitud?

De esta manera averiguamos que el número que teníamos que hallar era igual al m.c.m. de los divisores menos uno, ya que, la relación entre los restos y sus divisores era la misma.

	Resto de **2**	Resto de **3**	Resto de **4**	Resto de **5**	Resto de **6**
m.c.m(2,3,4,5,6) -1= 59	1	2	3	4	5
60	0	0	0	0	0

Así, aplicado al problema del concurso, obtendríamos una pista para averiguar el número mil ya que:

	Restos de **7**	Restos de **11**	Restos de **13**
m.c.m(7,11,13) -1= 1000	6	10	12
1001	0	0	0

3.1 Ecuaciones diofánticas

Una vez que teníamos una serie de restos de operaciones ya realizadas descubrimos cómo ponerlos en forma de **ecuación diofántica**. Simplemente consistía en poner la prueba de la división. De esta manera despejábamos el dividendo, el cual, era la incógnita que queríamos descubrir.

La prueba de la división consiste en que el dividendo (D) se puede expresar como el cociente (C) por el divisor (d) más el resto (R):

$$\mathbf{D = C \cdot d + R}$$

Por lo tanto:

$\mathbf{X - C_d \cdot d = R_d}$ donde: X es el dividendo
d es el divisor
C_d es el cociente de X entre el divisor d
R_d es el resto de X entre el divisor d

Más tarde buscamos y encontramos en Internet una definición clara de lo que eran las ecuaciones diofánticas, así como ejemplos de las mismas. Así, aquellas ecuaciones cuyas soluciones se exige que tomen valores enteros son conocidas como **ecuaciones diofánticas**, en honor a

Diofanto, matemático griego que entorno al año 275 las estudió extensivamente y dio soluciones a algunas de ellas. La teoría de las ecuaciones diofánticas ha llegado con el tiempo a contarse entre las más bellas y difíciles áreas de las matemáticas. Los valores de las soluciones pueden estar entre todos los números enteros, pudiendo además tener infinitas soluciones. Estas soluciones pueden ser valores que se obtengan sin cálculo alguno, es decir, pueden obtenerse por tanteo. Aparte de encontrar esta definición en una página de Internet, encontramos algunas condiciones que tienen que cumplir estas ecuaciones diofánticas para tener solución. Estas condiciones venían expresadas de una manera que nos costó entender dando la ecuación diofántica de la forma:

$$\mathbf{ax + by = c}$$

Explicaba que sólo existiría una solución de x e y siempre y cuando se pudiera realizar c/ MCD (a, b) y resultara un número entero. En esta expresión MCD(a,b) es el máximo común divisor de los números a y b.

Por ejemplo:

Si tenemos: $2x + 4y = 8$

Aplicando ese criterio diríamos que el MCD (2, 4) = 2; por lo que 8/ MCD (2, 4) = 8/2 = 4.

Al resultarnos un número entero damos por hecho que la ecuación diofántica se puede resolver. Así, una solución sería x = 2 e y = 1. Aunque el proceso que acabamos de explicar no es válido para conseguir una solución a nuestro problema, es un dato que tenemos que tener en cuenta, ya que, aplicado a nuestro problema las ecuaciones que obtengamos siempre van a tener solución, debido a lo siguiente:

$$7C_x + R_x = x$$
$$x - 7C_x = R_x$$
$$\mathbf{1x - 7y = 8}$$

Aplicando el criterio anterior: c/ MCD (a, b) = 8/ MCD (1, 7) = 8/1 = 8;

Por lo tanto, al ser siempre el MCD = 1 en las ecuaciones diofánticas que estamos manejando, podemos concluir que van a tener solución, ya que, al dividir **c** entre 1, el resultado es exacto.

Ejemplos de ecuaciones diofánticas con soluciones:

$$3x + 14y = 20$$

Una de las soluciones es:

$$x = 2;\ y = 1$$

Aparte de esta solución existen infinitas. Por ejemplo, otra solución puede ser:

$$x = -12;\ y = 4$$

Otro ejemplo:

$$13x - y = -2$$

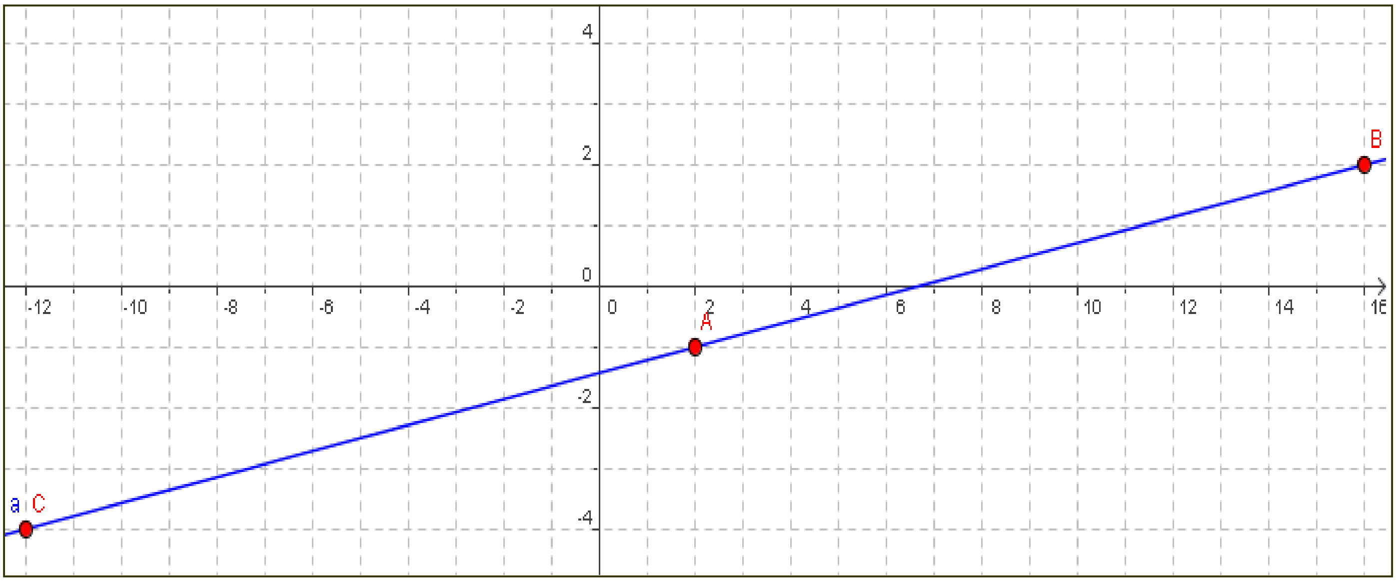
Una de las soluciones es:

$$x = 1;\ y = 15;$$

Aparte de esta solución podemos aportar otra:

$$x = 0;\ y = 2;$$

Otra forma de averiguar las soluciones es de forma gráfica, con un programa de geometría en el cual se puedan representar funciones. En nuestro caso hemos utilizado un programa llamado Geogebra, de Markus Hohenwarter. Para ello representamos la recta que obtenemos a partir de la ecuación diofántica:



Como se puede observar, la recta coincide con la cuadrícula en todas las soluciones de X e Y enteras. En este caso, en el que la ecuación es $3x + 14y = 20$; entre los infinitos valores existentes podemos observar en la gráfica los siguientes:

Punto A: x = 2; y = -1.
Punto B: x = 16; y = 2.
Punto C: x = -12; y = -4.

Al observar que esta forma no era la más, decidimos dejarlo y buscar otra forma. De este modo nuestro profesor nos habló del algoritmo de Euclides.

3.2 Solucionando ecuaciones diofánticas

Nosotros nos informamos en Internet sobre ello y encontramos que podíamos encontrar la solución correcta de la ecuación diofántica utilizando el algoritmo de Euclides. El algoritmo de Euclides es un método eficaz para calcular el MCD entre dos números enteros.

El algoritmo consiste en varias divisiones enteras sucesivas. En la primera división, se toma como dividendo el mayor de los números y como divisor el otro (se ahorra así un paso). Luego, el divisor y el resto sirven respectivamente de dividendo y divisor de la siguiente división. El proceso termina cuando se obtiene un resto nulo. El MCD es entonces el penúltimo resto del algoritmo.

Ejemplo:

42x + 32y = 2 (MCD (42, 32))

$$\begin{array}{l|l} 42 & 32 \\ \hline 10 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 32 & 10 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \rightarrow \text{MCD } (42, 32)$$

Este es un ejemplo que podemos aportar para explicar en qué consiste el algoritmo de Euclides. Para encontrar las soluciones de X e Y se nos ocurrió que podíamos utilizar las dos primeras divisiones realizadas usando la prueba de la división:

Así:

$42 \,\underline{|\,32}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{42 = 32 \cdot 1 + 10}$

$10 \quad 1$

Para ponerlas en común decidimos sumarlas y operar con ellas hasta conseguir una estructura similar a la ecuación original: $42x + 32y = 2$.

$32 \,\underline{|\,10}$ $\longrightarrow$ $\mathbf{32 = 10 \cdot 3 + 2}$

$2 \quad 3$

$$\begin{array}{r} 42 = 32 \cdot 1 + 10 \\ \underline{+\ 32 = 10 \cdot 3 + \ \ 2} \end{array}$$

El resultado que tenemos que conseguir es: $42\_ + 32\_ = \ 2$ siendo los subrayados los resultados de X e Y.

Para conseguir este resultado seguimos el siguiente procedimiento:

1º.- En la suma citada anteriormente, los únicos números que no aparecen en la ecuación original son 10 y 10·3. Entonces para eliminarlos al realizar la suma podemos efectuar esta operación:

$$\begin{array}{l} -3\,(42 = 32 \cdot 1 + 10) \\ \underline{+ \quad 32 = 10 \cdot 3 + 2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42 \cdot (-3) = 32 \cdot (-3) + \mathbf{10 \cdot (-3)} \\ \underline{+ \quad 32 = \mathbf{10 \cdot 3} + 2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 42 \cdot (-3) + 32 \cdot 3 = \mathbf{10 \cdot (-3)} \\ \underline{+ \quad 32 \cdot 1 = \mathbf{10 \cdot 3} + 2} \end{array}$$

De esta manera, el 10 del primer sumando queda multiplicado por -3; entonces al sumar 10· (-3) + 10·3 = 10·0 = 0; por lo tanto hemos conseguido el objetivo de eliminar los sumandos que en la ecuación original no aparecían, quedando como resultado:

$$\begin{array}{r} 42 \cdot (-3) + 32 \cdot 3 = \mathbf{10 \cdot (-3)} \\ \underline{+ \quad 32 \cdot 1 = \mathbf{10 \cdot 3} + 2} \end{array}$$

$42 \cdot \mathbf{(-3)} + 32 \cdot \mathbf{4} = 2$ $\longrightarrow$ Así conseguimos que el resultado de la suma tenga una estructura similar a la ecuación diofántica original siendo X e Y valores ya conocidos.

$42\mathbf{x} + 32\mathbf{y} = 2$

Vimos que con esta técnica tardábamos demasiado en encontrar los resultados de X e Y y que además no tenían porqué ser el dividendo y el cociente, respectivamente, de nuestra división.

Antes de darnos cuenta de que esta técnica no servía para averiguar las soluciones, la aplicamos a nuestro problema sobre los divisores 7, 11 y 13:

$x \,\underline{|\,7}$ $\qquad$ $x \,\underline{|\,11}$ $\qquad$ $x \,\underline{|\,13}$

$2 \quad y$ $\qquad$ $5 \quad z$ $\qquad$ $9 \quad w$

$x - 7y = 2 \longrightarrow x = 2 + 7y.$

$x - 11z = 5 \longrightarrow x = 5 + 11z.$

$x - 13w = 9 \longrightarrow x = 9 + 13w.$

Para realizar lo siguiente vamos a agrupar las distintas ecuaciones en tres grupos:

1º.- 7 y 11.
2º.- 7 y 13.
3º.- 11 y 13.

1º.- Los números 7 y 11, igualaremos sus ecuaciones hasta conseguir una sola, después operaremos con esa ecuación de la misma manera que operamos con el ejemplo explicado con anterioridad.

$x = 7y + 2$

$\longrightarrow \quad 7y + 2 = 11z + 5 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{7y - 11z = 3}$

$x = 11z + 5$

$11 \,\underline{|\,7} \longrightarrow 11 - 7\cdot 1 = 4. \longrightarrow 11 = 7\cdot 1 + 1$
$\;4 \quad 1$

$7 \,\underline{|\,4} \longrightarrow 7 - 4\cdot 1 = 3. \longrightarrow 7 = 4\cdot 1 + 3$
$\;3 \quad 1$

$11 = 7\cdot 1 + 4$
$\underline{+\; 7 = 4\cdot 1 + 3}$
$7\_ + 11\_ = 3$

En los sumandos el único número que aparece que no está en la ecuación que debemos conseguir es el 4, por tanto debemos tratar de eliminarlo. Para ello realizamos lo siguiente:

Como los cuatros de ambos sumandos están multiplicados por 1, lo único tenemos que hacer es multiplicar uno de ellos por -1; de esta manera, al sumar 4·1+ 4· (-1) el resultado es 0, alcanzando así nuestro objetivo:

$-1\,(11 = 7\cdot 1 + 4) \longrightarrow$	$11\cdot(-1) = 7\cdot(-1) + 4\cdot(-1) \longrightarrow$	$7\cdot 1 - 11\cdot 1 = 4\cdot(-1)$
$+\; 7 = 4\cdot 1 + 3$	$+\; 7 = 4\cdot 1 + 3$	$+\quad 7 = 4\cdot 1 + 3$
$7\_ + 11\_ = 3$	$7\_ + 11\_ = 3$	$7\cdot\mathbf{2} - 11\cdot\mathbf{1} = 3$

Así obtenemos que los cocientes obtenidos de dividir x entre 7 y 11 son:

y (cociente de 7) = 2 ; z (cociente de 11) = 1

Según esto, al sustituir ***y*** y ***z*** en la ecuación inicial por los cocientes correspondientes, obtenemos el valor de ***x***:

$x = 7y + 2 \longrightarrow x = 7\cdot 2 + 2 = \mathbf{16}.$

$x = 11z + 5 \longrightarrow x = 11\cdot 1 + 5 = \mathbf{16}.$

2º.- Ahora operaremos con los números 7 y 13 de la misma manera que hemos operado antes.

$x = 7y + 2$

$\longrightarrow \quad 7y + 2 = 9 + 13w \quad \longrightarrow \quad \mathbf{7y - 13w = 7}$

x = 9 + 13w.

13 |7 ⟶ 13 – 7·1 = 6.⟶ 13=7·1 + 6.
6 1

7 |6 ⟶ 7 – 6·1 = 1.⟶ 7 = 6·1 + 1.
1 1

13 = 7·1 + 6
+ 7 = 6·1 + 1
7_ -13_ = 7

En los sumandos el único número que aparece que no está en la ecuación que debemos conseguir es el 6, por tanto debemos tratar de eliminarlo. Para ello realizamos lo siguiente:

Como los seises de ambos sumandos están multiplicados por 1, lo único tenemos que hacer es multiplicar uno de ellos por -1; de esta manera, al sumar 6·1+ 6· (-1) el resultado es 0, alcanzando así nuestro objetivo:

-1 (13 = 7·1 + 6)	⟶	13·(-1) = 7·(-1) + 6·(-1)	⟶	7·1 - 13·1= 6·(-1)
+ 7 = 6·1 + 1		+ 7 = 6·1 + 1		+ 7 = 6·1 + 1
7_ - 13_ = 7		7_ - 13_ = 7		7·**2** – 13·**1**= 1

La siguiente operación hay que realizarla para que el resultado a la derecha del *igual* sea siete y no uno

7·**2** – 13·**1**= 1 ⟶ 7(7·**2** – 13·**1**= 1)

Por lo tanto el resultado final sería:

7·**14 –** 13·**7 = 7**

Así obtenemos que los cocientes obtenidos de dividir x entre 7 y 13 son:

y (cociente de 7) = 14 ; w (cociente de 13) = 7

Según esto, al sustituir ***y*** y **w** en la ecuación inicial por los cocientes correspondientes, obtenemos el valor de ***x***:

x = 7y + 2 ⟶ x = 7·14 + 2 = **100**.

x = 13w + 9 ⟶ x = 13·7 + 9= **100**.

Al hacer estos dos procedimientos, sin necesidad de hacer el tercero, observamos que el resultado de la incógnita no coincidía. Por ello decidimos buscar otra manera de resolver nuestro problema.

Al no encontrar ninguna por nosotros mismos recurrimos a nuestro profesor y él nos recomendó otra forma para resolver el problema que aprovechaba las ecuaciones sacadas en los sistemas anteriores. Él nos la explicó con un ejemplo más fácil, es decir, con números diferentes a los nuestros y que luego por nuestra parte debíamos aplicar a los números 7, 11 y 13.

Dicha forma consistía en conseguir que las incógnitas (cocientes de las divisiones) de las ecuaciones obtenidas desapareciesen, sustituyéndolas por un parámetro (u) que se puede sustituir por cualquier número entero. De esta manera hayamos una ecuación con una sola incógnita, X (dividendo de las operaciones), junto a los restos (valores conocidos).

Nuestro profesor nos lo explicó con un ejemplo que tuviera números más fáciles (2 y 5), aplicando de esta manera el procedimiento de una forma clara.

$$\left.\begin{matrix} x-5C_5=R_5 \\ x-2C_2=R_2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=5C_5+R_5 \\ x-2C_2=R_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} (5C_5+R_5)-2C_2=R_2$$

$5C_5 - 2C_2 = R_2 - R_5$

$2\,(\mathbf{2C_5 - C_2}) + C_5 = R_2 - R_5$

$\mathbf{u = 2C_5 - C_2}$ $\quad 2u + C_5 = R_2 - R_5$

$C_2 = 2C_5 - u$ $\quad C_5 = R_2 - R_5 - 2u$

$$\left.\begin{matrix} C_2=2C_5-u \\ C_5=R_2-R_5-2u \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} C_2 = 2\,(R_2 - R_5 - 2u) - u$$

$C_2 = 2R_2 - 2R_5 - 4u - u$

$C_2 = 2R_2 - 2R_5 - 5u$

Sustituimos C_2 y C_5 en las ecuaciones originales:

$x = 5C_5 + R_5 \longrightarrow x = 5\,(R_2 - R_5 - 2u) + R_5 \longrightarrow x = 5R_2 - 5R_5 - 10u + R_5 \longrightarrow x = 5R_2 - 4R_5 - 10u$

$x = 2C_2 + R_2 \longrightarrow x = 2\,(2R_2 - 2R_5 - 5u) + R_2 \longrightarrow x = 4R_2 - 4R_5 - 10u + R_2 \longrightarrow x = 5R_2 - 4R_5 - 10u$

Podemos observar que x en ambas ecuaciones tiene la misma solución.

3.3 Comprobando la solución en casos más sencillos

Ahora vamos a mostrar un ejemplo para comprobar que con la fórmula obtenemos la solución correcta:

Como dijimos anteriormente las series de restos no se repiten hasta que el dividendo es el m.c.m. de los divisores (en este caso dos y cinco), por tanto, en el siguiente ejemplo vamos a utilizar como dividendo un número comprendido entre el m.c.m(2,5)=10.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{7} & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \mathbf{7} & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

Aplicamos la fórmula: $x = 5R_2 - 4R_5 - 10u$ (siendo u un número cualquiera con el que obtengamos como solución un número comprendido entre 0 y el m.c.m. de los divisores)

Sustituimos los datos conocidos en la fórmula: $R_2 = 1$; $R_5 = 2$

$x = 5\cdot1 - 4\cdot2 - 10u \longrightarrow x = 5 - 8 - 10\cdot0$ u = **0** (vamos sustituyendo u por números distintos hasta que hallemos un número comprendido entre 0 y el m.c.m de 2 y 5).

$x = -3$ **NO VÁLIDO**

$x = 5 - 8 - 10\cdot(-1)$ u = **-1 en este caso sólo obtenemos un valor válido si u = -1, ya que con otros valores de u ocurre lo siguiente:**

$x = 7$ **VÁLIDO**

$x = 5 - 8 - 10\cdot1$ u = 1

$x = -13$ **NO VÁLIDO**

$x = 5 - 8 - 10\cdot(-2)$ u = -2

x = 17 **NO VÁLIDO**

Así, cuanto más se aleje el valor de u del valor con el que obtenemos un resultado válido de x, más se alejará el valor obtenido de x de su valor correcto.

3.4 Volviendo a nuestro problema

Al observar que el resultado obtenido era el correcto aplicamos ese ejemplo a nuestro caso de tal manera, que tuvimos que hacer tres sistemas relacionando uno por uno los tres términos, es decir, haciendo un sistema con 7 y 11, otro con 11 y 13 y un último con 7 y 13. Por lo tanto, nos quedó algo como esto:

<u>7 y 11</u>

$$\left.\begin{array}{l} x-7C_7=R_7 \\ x-11C_{11}=R_{11} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=7C_7+R_7 \\ x-11C_{11}=R_{11} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \left(7C_7+R_7\right)-11C_{11}=R_{11}$$

$$7C_7-11C_{11}=R_{11}-R_7$$

$$2\,(7C_7-11C_{11}=R_{11}-R_7)$$

$$14C_7-22C_{11}=2R_{11}-2R_7$$

$$14C_7-21C_{11}-C_{11}=2R_{11}-2R_7 \longrightarrow$$ Extraemos un C_{11} para despejarlo más tarde

$u = 2C_7 - 3C_{11}$ $\quad$ $7(2C_7-3C_{11})-C_{11}=2R_{11}-2R_7$

$C_7 = \dfrac{u+3C_{11}}{2}$ $\quad$ $7u-C_{11}=2R_{11}-2R_7$

$$C_{11}=7u-2R_{11}+2R_7$$

$$C_7=\frac{u+3(7u-2R_{11}+2R_7)}{2} \longrightarrow$$ Sustituimos C_{11} por su valor en la ecuación anterior.

$$C_7=\frac{22u-6R_{11}+6R_7}{2}=11u-3R_{11}+3R_7$$

Sustituimos los valores de C_7 y C_{11} en la ecuación resultante del sistema anterior:

$x = 7C_7 + R_7 \longrightarrow x = 7(11u - 3R_{11} + 3R_7) + R_7 \longrightarrow$ $\mathbf{x = 77u - 21R_{11} + 22R_7}$

$x = 11C_{11} + R_{11} \longrightarrow x = 11(7u - 2R_{11} + 2R_7) + R_{11} \longrightarrow$ $\mathbf{x = 77u - 21R_{11} + 22R_7}$

Comprobación:

El dividendo del ejemplo que usemos debe encontrarse entre los números 0 y 77, ya que, 77 es el m.c.m. de 7 y 11 (los divisores).

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{23} & 7 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathbf{23} & 11 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Sustituimos los datos conocidos en la fórmula: $R_7 = 2$; $R_{11} = 1$

x =**77u – 21·1 + 22·2** ⟶ x = 77·0 - 21 + 44 $\qquad$ u = **0**

x = 23 **VÁLIDO**

11 y 13

$$\left.\begin{aligned} x-13C_{13} &= R_{13} \\ x-11C_{11} &= R_{11} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 13C_{13}+R_{13} \\ x-11C_{11} &= R_{11} \end{aligned}\right\} \left(13C_{13}+R_{13}\right)-11C_{11} = R_{11}$$

$$13C_{13} - 11C_{11} = R_{11} - R_{13}$$

$$6\,(13C_{13} - 11C_{11} = R_{11} - R_{13})$$

$$78C_{13} - 66C_{11} = 6R_{11} - 6R_{13}$$

$$77C_{13} - 66C_{11} + C_{13} = 6R_{11} - 6R_{13} \longrightarrow$$ Extraemos un C_{13} para despejarlo más tarde

$u = 7C_{13} - 6C_{11}$ $\qquad$ $11(7C_{13} - 6C_{11}) + C_{13} = 6R_{11} - 6R_{13}$

$C_{11} = \dfrac{7C_{13} - u}{6}$ $\qquad$ $11u + C_{13} = 6R_{11} - 6R_{13}$

$$C_{13} = 6R_{11} - 6R_{13} - 11u$$

$$C_{11} = \frac{7(6R_{11} - 6R_{13} - 11u)}{6} \longrightarrow$$ Sustituimos C_{13} por su valor en la ecuación anterior.

$$C_{11} = \frac{42R_{11} - 42R_{13} - 78u}{6} = 7R_{11} - 7R_{13} - 13u$$

Sustituimos los valores de C_{13} y C_{11} en la ecuación resultante del sistema anterior:

$x = 13C_{13} + R_{13} \longrightarrow x = 13(6R_{11} - 6R_{13} - 11u) + R_{13} \longrightarrow$ **$x = 78R_{11} - 77R_{13} - 143u$**

$x = 11C_{11} + R_{11} \longrightarrow x = 11(7R_{11} - 7R_{13} - 13u) + R_{11} \longrightarrow$ **$x = 78R_{11} - 77R_{13} - 143u$**

Comprobación:

El dividendo del ejemplo que usemos debe encontrarse entre los números 0 y 143, ya que, 143 es el m.c.m. de 13 y 11 (los divisores).

23 | 13 $\quad$ **23** | 11
10 $\;$ 1 $\qquad$ 1 $\;$ 2

Sustituimos los datos conocidos en la fórmula: $R_{13} = 10$; $R_{11} = 1$

x = **78·1 – 77·10 – 143u** ⟶ x = 78 - 770 – 143·0 $\quad$ u = **0**
x = -692 **NO VÁLIDO**

x = **78·1 – 77·10 – 143u** ⟶ x = 78 - 770 – 143·1 $\quad$ u = **1**
x = -835 **NO VÁLIDO**

x = **78·1 – 77·10 – 143u** ⟶ x = 78 - 770 – 143· (-2) $\quad$ u = **-2**
x = -406 **NO VÁLIDO**

x = **78·1 – 77·10 – 143u** ⟶ x = 78 - 770 – 143· (-5) $\quad$ u = **-5**
x = 23 **VÁLIDO**

7 y 13

$$\left.\begin{array}{l} x-7C_7=R_7 \\ x-13C_{13}=R_{13} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=7C_7+R_7 \\ x-13C_{13}=R_{13} \end{array}\right\} (7C_7+R_7)-13C_{13}=R_{13}$$

$$7C_7 - 13C_{13} = R_{13} - R_7$$

$$-C_{13} + (7C_7 - 13C_{13} = R_7 - R_{13})$$

$$7C_7 - 14C_{13} = R_7 - R_{13} - C_{13}$$

$u = C_7 - 2C_{13}$ $\qquad 7(C_7 - 2C_{13}) = R_7 - R_{13} - C_{13} \longrightarrow$ Extraemos un C_{13} para despejarlo más tarde

$$7u + C_{13} = R_{13} - R_7$$

$C_7 = u + 2C_{13}$ $\qquad C_{13} = R_{13} - R_7 - 7u$

$C_7 = u + 2(R_{13} - R_7 - 7u) \longrightarrow$ Sustituimos C_7 por su valor en la ecuación anterior.

$$C_7 = u + 2R_{13} - 2R_7 - 14u = 2R_{13} - 2R_7 - 13u$$

Sustituimos los valores de C_{13} y C_7 en la ecuación resultante del sistema anterior:

$x = 13C_{13} + R_{13} \longrightarrow x = 13(R_{13} - R_7 - 7u) + R_{13} \longrightarrow$ $\mathbf{x = 14R_{13} - 13R_7 - 91u}$

$x = 7C_7 + R_7 \longrightarrow x = 7(2R_{13} - 2R_7 - 13u) + R_7 \longrightarrow$ $\mathbf{x = 14R_{13} - 13R_7 - 91u}$

Comprobación:

El dividendo del ejemplo que usemos debe encontrarse entre los números 0 y 91, ya que, 91 es el m.c.m. de 13 y 7 (los divisores).

23	13		**23**	7
10	1		2	3

Sustituimos los datos conocidos en la fórmula: $R_{13} = 10$; $R_7 = 2$

$x = \mathbf{14 \cdot 10 - 13 \cdot 2 - 91u} \longrightarrow x = 140 - 26 - 91 \cdot 0 \qquad u = \mathbf{0}$

$x = 114$ **NO VÁLIDO**

$x = \mathbf{14 \cdot 10 - 13 \cdot 2 - 91u} \longrightarrow x = 140 - 26 - 91 \cdot 1 \qquad u = \mathbf{1}$

$x = 23$ **VÁLIDO**

Una vez teníamos los resultados de x de forma independiente, intentamos unirlos para dar con la solución al problema que se nos plantea. A continuación vamos a mostrar los procesos seguidos en la búsqueda de la fórmula final:

Primero se nos ocurrió que quizás podríamos encontrar una solución uniendo todos los resultados de x obtenidos en una sola ecuación, para después despejar x.

Para ello pensamos en unirlos mediante la suma de las x obteniendo al final del proceso una sola ecuación con una incógnita, los tres parámetros y los tres restos.

A continuación, explicaremos este proceso que más tarde descubriríamos que debido a que los parámetros no eran divisibles entre tres (número de veces que está presente x) y que además eran valores distintos, no era válido, pues el resultado de x podía no ser exacto, y nosotros buscamos valores exactos.

$$x = \qquad 14R_{13} - 13R_7 - 91u$$
$$x = 78R_{11} - 77R_{13} \qquad - 143z$$
$$\underline{+\ x = -21R_{11} \qquad + 22R_7 + 77w}$$
$$\mathbf{3x = 57R_{11} - 63R_{13} + 9R_7 - 91u - 143z + 77w}$$

$x = 19R_{11} - 21R_{13} + 3R_7 + \dfrac{-91u - 143z + 77w}{3}$ $\longrightarrow$ Debido a esta situación el valor de x podría no ser entero haciendo también que el proceso de obtención de los parámetros adecuados se prolongara demasiado.

Por lo tanto, nos pusimos a pensar y recurrimos a las sucesiones aritméticas, comenzando a investigar sobre cómo podrían estar relacionadas con nuestro problema. Antes de nada, decir, que nos acordamos de ellas debido a que los resultados obtenidos individualmente de cada una de las fórmulas anteriores eran los primeros de las sucesiones de dividendos que tienen en común los dos restos con los que se ha efectuado la operación. Por ejemplo:

Resultados de x:

x = 40;	x = 47;	x = 14.
40	47	14
131	124	157
222	201	300
313	278	443
404	355	**586**
495	509	
586	**586**	

Como podemos observar llega un momento en el que sucesiones coinciden en un número que ha de estar entre 1 y 1001 (m.c.m de 7, 11 y 13). Intentamos establecer una relación entre las tres sucesiones para encontrar el número pedido, en el que convergen las tres.

4. Resultados

Al ver que era un proceso fiable, intentamos conseguir una fórmula con la que pudiéramos calcular los términos de la sucesión con rapidez hasta encontrar el término que buscábamos.

Ya terminado, nuestra solución, junto con las fórmulas que permiten llegar hasta ésta, sería:

Para calcular los términos de la sucesión de los dividendos cuyos divisores son 7, 11 y 13, las fórmulas serían:

7 y 11:

$S_i = x_1 + 77i$

11 y 13:

$S_j = x_2 + 143j$

7 y 13:

$S_k = x_3 + 91k$

*Siendo S el número buscado, x cada una de las ecuaciones anteriores correspondientes y siendo i, j y k variables que van aumentando una unidad hasta hallar los términos coincidentes.

Para demostrarlo aportamos este ejemplo:

$$x_1 \underline{|\ 7}\quad 1 \quad C_7 \qquad\qquad x_2 \underline{|\ 11}\quad 5 \quad C_{11} \qquad\qquad x_3 \underline{|\ 13}\quad 9 \quad C_{13}$$

$\mathbf{x_1 = 14R_{13} - 13R_7 - 91u \longrightarrow x_1 = 14\cdot 9 - 13\cdot 1 - 91\cdot 1 \longrightarrow}$ 22.

$\mathbf{x_2 = 78R_{11} - 77R_{13} - 143u \longrightarrow x_2 = 78\cdot 5 - 77\cdot 9 - 143\cdot (-3) \longrightarrow}$ 126.

$\mathbf{x_3 = 77u - 21R_{11} + 22R_7 \longrightarrow x_3 = 77\cdot 2 - 21\cdot 5 + 22\cdot 1 \longrightarrow}$ 71.

7 y 13: $S_i = x_1 + 91i$	11 y 13: $S_j = x_2 + 143j$	7 y 11: $S_k = x_3 + 77k$
$S_i = 22 + 91\cdot 0 \longrightarrow 22$	$S_j = 126 + 143\cdot 0 \longrightarrow 126$	$S_k = 71 + 77\cdot 0 \longrightarrow 77$
$S_i = 22 + 91\cdot 1 \longrightarrow 113$	$S_j = 126 + 143\cdot 1 \longrightarrow 269$	$S_k = 71 + 77\cdot 1 \longrightarrow 148$
$S_i = 22 + 91\cdot 2 \longrightarrow 204$	$S_j = 126 + 143\cdot 2 \longrightarrow 412$	$S_k = 71 + 77\cdot 2 \longrightarrow 225$
$S_i = 22 + 91\cdot 3 \longrightarrow 295$	$S_j = 126 + 143\cdot 3 \longrightarrow 555$	$S_k = 71 + 77\cdot 3 \longrightarrow 302$
$S_i = 22 + 91\cdot 4 \longrightarrow 386$	$S_j = 126 + 143\cdot 4 \longrightarrow 698$	$S_k = 71 + 77\cdot 4 \longrightarrow 379$
$S_i = 22 + 91\cdot 5 \longrightarrow 477$	$S_j = 126 + 143\cdot 5 \longrightarrow \underline{\mathbf{841}}$	$S_k = 71 + 77\cdot 5 \longrightarrow 456$
$S_i = 22 + 91\cdot 6 \longrightarrow 568$	$S_j = 126 + 143\cdot 6 \longrightarrow 984$	$S_k = 71 + 77\cdot 6 \longrightarrow 533$
$S_i = 22 + 91\cdot 7 \longrightarrow 659$		$S_k = 71 + 77\cdot 7 \longrightarrow 610$
$S_i = 22 + 91\cdot 8 \longrightarrow 750$		$S_k = 71 + 77\cdot 8 \longrightarrow 687$
$S_i = 22 + 91\cdot 9 \longrightarrow \underline{\mathbf{841}}$		$S_k = 71 + 77\cdot 9 \longrightarrow 764$
$S_i = 22 + 91\cdot 10 \longrightarrow 932$		$S_k = 71 + 77\cdot 11 \longrightarrow \underline{\mathbf{841}}$
		$S_k = 71 + 77\cdot 12 \longrightarrow 918$
		$S_k = 71 + 77\cdot 13 \longrightarrow 995$

COMPROBACIÓN:

$$\mathbf{841}\ \underline{|\ \mathbf{7}}\quad 1 \quad \mathbf{120} \qquad\qquad \mathbf{841}\ \underline{|\ \mathbf{11}}\quad 5 \quad \mathbf{76} \qquad\qquad \mathbf{841}\ \underline{|\ \mathbf{13}}\quad 9 \quad \mathbf{64}$$

$\mathbf{120}\cdot 7 + 1 = \underline{\mathbf{841}}$ $\qquad$ $\mathbf{76}\cdot 11 + 5 = \underline{\mathbf{841}}$ $\qquad$ $\mathbf{64}\cdot 13 + 9 = \underline{\mathbf{841}}$

Por lo tanto, llegamos a obtener un resultado rápido y sencillo con el que podríamos de una manera original resolver nuestro problema, haciendo que parezca un juego de magia.

5. Conclusiones

1ª. – Hemos aprendido a valorar la división entera y el significado del resto de una división. (el desfase de un ciclo).

2ª. – Por igual, valoramos el obtener información de datos que aparentemente no tienen utilidad.

3ª. – El método científico, que inicialmente nos han enseñado para Ciencias Aplicadas (Física, Química, Biología, etc.) se puede aplicar también en Matemáticas. Así como la experimentación, sobre la que hemos aprendido a hacer conjeturas, a veces acertadas y a veces erróneas.

4ª. – Existe una solución parcial del problema, en la que si los restos difieren en uno de los divisores la solución era el m.c.m de los divisores menos uno.

5ª. – La conclusión más importante es que es posible solucionar este problema utilizando las tres series de términos que deben coincidir en el dividendo desconocido.

6. Bibliografía

http://www.arrakis.es/~mcj/diofanto.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto
http://descartes.cnice.mecd.es/Algebra/divisibilidad/mcd_mcm.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Euclides
http://www.dma.fi.upm.es/java/matematicadiscreta/Aritmeticamodular/divisibilidad.html
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/MateMagia/Chino/chino.html