DERIVADAS

- Derivar (con respecto a x) las siguientes funciones:

1) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

Aplicando la derivada del cociente: $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f(x)'\,g(x) - f(x)g(x)'}{(g(x))^2}$

$$f(x)' = \frac{2x(x^2+3) - (x^2-3)2x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

2) $y = \sqrt[3]{3x^2}$

Para derivar una raíz es mejor expresarla como una potencia de exponente fraccionario: $y = (3x^2)^{\frac{1}{3}}$ y utilizar la regla de derivación de la función potencial: $D\left[(f(x))^n\right] = n(f(x))^{n-1}\, f(x)'$

$$f(x)' = \frac{1}{3}(3x^2)^{\frac{1}{3}-1} 6x = 2x(3x^2)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2x}{\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \frac{2x}{x\sqrt[3]{9x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$$

3) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$

Utilizamos la regla de derivación de la función potencial: $D\left[(f(x))^n\right] = n(f(x))^{n-1}\, f(x)'$

Aplicaremos la regla de la cadena, para lo que necesitaremos también la derivada del cociente.

$$f(x)' = \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}-1} \frac{-1\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{-1}{3}} \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-4}{3(1+x)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

4) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2} = 2x^{-1} + \dfrac{x^2}{2}$

Obtenemos: $f(x)' = -2x^{-2} + \dfrac{2x}{2} = \dfrac{-2}{x^2} + x$

5) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Aplicamos la derivada del cociente: $f(x)' = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

6) $y = 7e^{-x}$

Obtenemos: $f(x)' = -7e^{-x}$

7) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Aplicando la derivada del cociente $D\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f(x)'\,g(x) - f(x)g(x)'}{(g(x))^2}$

Obtenemos:
$$f(x)'=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)-\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}-2e^xe^{-x}-e^{-2x}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=\frac{-4}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}$$

8) $y=senx\cos x$

Aplicamos la derivada del producto: $D\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)'\,g(x)+f(x)\cdot g(x)'$

Obtenemos: $f(x)'=\cos(x)\cos(x)+sen(x)\left(-sen(x)\right)=\cos^2(x)-sen^2(x)=\cos(2x)$

9) $y=sen(x\cos x)$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)'=\cos\left(x\cos x\right)\cdot\left(1\cdot\cos x+x\left(-senx\right)\right)=\cos\left(x\cos x\right)\cdot\left(\cos x-xsenx\right)$

10) $y=\left(senx\right)^{\cos x}$

Esta derivada no está en la tabla de derivadas inmediatas ya que no es una potencial (su exponente no es una constante) ni una exponencial (su base no es una constante). Por ello recurriremos a la derivación logarítmica:

Tenemos: $f(x)=\left(senx\right)^{\cos x}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x)=\ln\left(senx\right)^{\cos x}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B=B\ln A$ obtenemos:
$$\ln f(x)=\cos x\ln\left(senx\right)$$

Ahora derivamos: $\dfrac{1}{f(x)}f(x)'=-senx\ln(senx)+\cos x\dfrac{\cos x}{senx}$

Despejando: $f(x)'=f(x)\left(-senx\ln(senx)+\cos x\dfrac{\cos x}{senx}\right)=\left(senx\right)^{\cos x}\left(-senx\ln(senx)+\dfrac{\cos^2 x}{senx}\right)$

11) $y=sen\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)'=\cos\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)\dfrac{1\cdot\cos x-x(-senx)}{\cos^2 x}=\cos\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)\dfrac{\cos x+xsenx}{\cos^2 x}$

12) $y=\dfrac{senx}{\cos x}$

Podríamos utilizar la relación trigonométrica por la cual $y=\dfrac{senx}{\cos x}=\tan x$ y aplicar la fórmula para derivar la tangente: $f(x)'=1+\tan^2 x$

O utilizar la derivada del cociente:
$$f(x)'=\frac{\cos x\cos x-senx(-senx)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+sen^2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\tan^2 x$$

13) $y=\dfrac{1}{senx}$

Podemos utilizar la derivada del cociente o expresar la función así: $y=\left(sen\left(x\right)\right)^{-1}$ y usar la regla de derivación de la función potencial $D\left[\left(f(x)\right)^n\right]=n\left(f(x)\right)^{n-1}f(x)'$. Vamos a aplicar ésta última.
$$f(x)'=-1\left(sen\left(x\right)\right)^{-2}\cos\left(x\right)=\frac{-\cos\left(x\right)}{sen^2\left(x\right)}$$

14) $y = \ln\left(x^2+1\right)$

Utilizamos la regla de derivación del logaritmo neperiano: $D\left[\ln(f(x))\right] = \dfrac{1}{f(x)} f(x)'$ y la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

15) $y = arctg\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{\dfrac{9+x^2}{9}}\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9+x^2}$

16) $y = \cos^2\left(2x-\pi\right)$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = 2\cos(2x-\pi)\cdot(-sen(2x-\pi))\cdot 2 = -4\cos(2x-\pi)sen(2x-\pi)$

17) $y = sen^2 x$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = 2senx\cdot\cos x = sen(2x)$

18) $y = senx^2$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = \cos(x^2)\cdot 2 = 2\cos(x^2)$

19) $y = \sqrt{tgx} = \left(\tan x\right)^{\frac{1}{2}}$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{2}\left(\tan x\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(1+\tan^2 x\right) = \dfrac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

20) $y = \left(2\sqrt{x}-3\right)^7$

Por la regla de la cadena: $f(x)' = 7\left(2\sqrt{x}-3\right)^6\cdot 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7\left(2\sqrt{x}-3\right)^6}{\sqrt{x}}$

21) $y = \log_2\sqrt{x}$

Podemos aplicar las leyes de los logaritmos y luego derivar: $y = \log_2\sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 x$

De donde: $f(x)' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}\log_2 e = \dfrac{\log_2 e}{2x}$

O aplicar directamente la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\log_2 e\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\log_2 e}{2x}$

22) $y = \cos^5\left(7x^2\right)$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f(x)' = 5\cos^4\left(7x^2\right)\left(-sen\left(7x^2\right)\right)14x = -70\cos^4\left(7x^2\right)sen\left(7x^2\right)$$

23) $y = 3^x+1$

Aplicando las reglas de derivación: $f(x)' = 3^x\ln 3$

24) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2} = \left(5x-3\right)^{\frac{2}{3}}$

Aplicando la derivada de la función potencial: $f(x)' = \dfrac{2}{3}\left(5x-3\right)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x-3}}$

25) $y = arcsen\dfrac{x^2}{3}$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}}\dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x}{3\sqrt{\dfrac{9-x^4}{9}}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9-x^4}}$

26) $y = \ln(2x-1)$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{2}{2x-1}$

27) $y = \arccos\sqrt{2x}$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{2x}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2 = \dfrac{-1}{\sqrt{2x\cdot(1-2x)}}$

28) $y = \ln\sqrt{1-x}$

Podemos utilizar las propiedades de los logaritmos y luego derivar:

$$y = \ln\sqrt{1-x} = \ln(1-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

de donde: $f(x)' = \dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{-1}{2-2x} = \dfrac{1}{2x-2}$

o derivar directamente utilizando la regla de la cadena:

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1) = \frac{-1}{2(1-x))} = \frac{-1}{2-2x} = \frac{1}{2x-2}$$

29) $y = \arctan^2 x$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = 2\arctan x\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2\arctan x}{1+x^2}$

30) $y = \log_3(7x+2)$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{7x+2}\ln 3\cdot 7 = \dfrac{7\ln 3}{7x+2}$

31) $\ln tg\dfrac{3}{x}$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{\tan\dfrac{3}{x}}\left(1+\tan^2\dfrac{3}{x}\right)\dfrac{-3}{x^2} = \dfrac{-3\left(1+\tan^2\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\tan\dfrac{3}{x}}$

32) $y = e^{4x}$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = 4e^{4x}$

33) $y = \ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$

Aplicando la regla de la cadena y las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)' = \frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x\ln\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x(\ln 1-\ln x)} = \frac{-1}{x(\ln 1-\ln x)} = \frac{1}{x\ln x}$$

34) $y = 2^x$

Esta derivada es inmediata: $f(x)' = 2^x \ln 2$

35) $y = arcsen \dfrac{x+1}{x-1}$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}} = \frac{-2}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+1-x^2-2x-1}}$$

$$f(x)' = \frac{-2}{(x-1)\sqrt{-4x}} = \frac{-1}{(x-1)\sqrt{-x}}$$ que sólo tiene sentido si x<0

36) $y = 5tg^3(3x^2+1)$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f(x)' = 15\tan^2(3x^2+1)(1+\tan^2(3x^2+1))6x = 90x\tan^2(3x^2+1)(1+\tan^2(3x^2+1))$$

37) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

Aplicando la regla de la cadena: $f(x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

38) $y = \sqrt{\tan^2 x} = \tan x$

Al simplificar la expresión aparece una derivada inmediata: $f(x)' = 1+\tan^2 x$

39) $y = \sqrt{\tan x^2}$

Aquí no podemos simplificar al estar el cuadrado dentro de la tangente, así que derivamos aplicando la regla de la cadena:

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x^2}}(1+\tan^2 x^2)2x = \frac{(1+\tan^2 x^2)x}{\sqrt{\tan x^2}}$$

40) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

Aplicando la regla de la cadena:

$$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}} \frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{2}{(x+2)\sqrt{(x-2)(x+2)}}$$

41) $x^2+y^2=9$

Podemos hacer esta deriva de dos formas. La primera es despejar la "y": $y=\sqrt{9-x^2}$ y luego derivar:

$$f(x)' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Otra forma es hacer la derivada sin despejar. Esto se denomina **DERIVACIÓN IMPLÍCITA**. Para hacerla hay que derivar y como y'. La derivada de x será 1:

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow 2x\cdot 1+2y\cdot y'=0$$

Despejando y': $y' = \dfrac{-2x}{2y} = \dfrac{-x}{y}$ y sustituyendo y por su valor: $y' = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

42) $x^2+y^2-4x-6y=-9$

En este caso es imposible despejar la y, por lo que lo único que podemos hacer es derivar implícitamente (es decir, sin despejar):

$$x^2+y^2-4x-6y=-9 \Rightarrow 2x\cdot 1+2y\cdot y'-4\cdot 1-6\cdot y'=0 \Rightarrow (2y-6)y'=4-2x \Rightarrow y'=\frac{4-2x}{2y-6}=\frac{2-x}{y-3}$$

No debe sorprender que el valor de la derivada dependa de tanto de la abscisa (x) del punto como de su ordenada (y). Máxime si no es posible despejar (lo que significa que la ordenada no puede ponerse en función de la abscisa).

43) $x^3+y^3=-2xy$

No es posible despejar la y, por lo que haremos la derivación implícita (observa que la derivada del segundo miembro es la derivada de un producto):

$$x^3+y^3=-2xy \Rightarrow 3x^2\cdot 1+3y^2\cdot y'=-2\cdot y+(-2x)\cdot y' \Rightarrow 3x^2+3y^2\cdot y'=-2y-2xy'$$

$$3y^2\cdot y'+2xy'=-2y-3x^2 \Rightarrow (3y^2+2x)y'=-2y-3x^2 \Rightarrow y'=\frac{-2y-3x^2}{3y^2+2x}$$

44) $xy^2=x^2+y$

No es posible despejar la y, por lo que haremos la derivación implícita (observa que la derivada del primer miembro es la derivada de un producto):

$$xy^2=x^2+y \Rightarrow 1\cdot y^2+x\cdot 2yy'=2x\cdot 1+y' \Rightarrow (2xy-1)y'=2x-y^2 \Rightarrow y'=\frac{2x-y^2}{2xy-1}$$

45) $y=x^{3x}$

Esta derivada no está en la tabla de derivadas inmediatas ya que no es una potencial (su exponente no es una constante) ni una exponencial (su base no es una constante). Por ello recurriremos a **la derivación logarítmica**:

Tenemos: $f(x)=x^{3x}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x)=\ln x^{3x}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B=B\ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x)=3x\ln x$$

Ahora derivamos: $\frac{1}{f(x)}f(x)'=3\ln x+3x\frac{1}{x}=3\ln x+3 \Rightarrow f(x)'=f(x)(3\ln x+3)$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)'=x^{3x}(3\ln x+3)$

46) $y=x^{x+1}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x)=\ln x^{x+1}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B=B\ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x)=(x+1)\ln x$$

Ahora derivamos: $\frac{1}{f(x)}f(x)'=1\cdot\ln x+(x+1)\frac{1}{x}=\ln x+\frac{x+1}{x} \Rightarrow f(x)'=f(x)\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)'=x^{x+1}\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right)$

47) $y=x^{e^x}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x)=\ln x^{e^x}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B=B\ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x)=e^x\ln x$$

Ahora derivamos: $\frac{1}{f(x)} f(x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \Rightarrow f(x)' = f(x)\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right)$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)' = x^{e^x}\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right)$

48) $y = (\ln x)^{x+1}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x) = \ln(\ln x)^{x+1}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B = B \ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x) = (x+1)\ln \ln x$$

Ahora derivamos: $\frac{1}{f(x)} f(x)' = 1 \cdot \ln \ln x + (x+1)\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} \Rightarrow f(x)' = f(x)\left(\ln \ln x + \frac{x+1}{x \ln x} \right)$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)' = (\ln x)^{x+1}\left(\ln \ln x + \frac{x+1}{x \ln x} \right)$

49) $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^x$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x) = \ln\left(\frac{senx}{x} \right)^x$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B = B \ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x) = x \ln \frac{senx}{x}$$

Ahora derivamos:

$$\frac{1}{f(x)} f(x)' = 1 \cdot \ln \frac{senx}{x} + x \frac{1}{\frac{senx}{x}} \frac{\cos x \cdot x - senx \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f(x)' = f(x)\left(\ln \frac{senx}{x} + \frac{x \cos x - senx}{senx} \right)$$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)' = \left(\frac{senx}{x} \right)^x \left(\ln \frac{senx}{x} + \frac{x \cos x - senx}{senx} \right)$

50) $y = x^{\tan x}$

Aplicamos logaritmos neperianos: $\ln f(x) = \ln x^{\tan x}$

Por la propiedad de los logaritmos según la cual $\ln A^B = B \ln A$ obtenemos:

$$\ln f(x) = \tan x \ln x$$

Ahora derivamos: $\frac{1}{f(x)} f(x)' = (1 + \tan^2 x)\ln x + \frac{\tan x}{x} \Rightarrow f(x)' = f(x)\left((1 + \tan^2 x)\ln x + \frac{\tan x}{x} \right)$

Sustituyendo el valor de la función queda: $f(x)' = x^{\tan x}\left((1 + \tan^2 x)\ln x + \frac{\tan x}{x} \right)$

- Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

1) $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)$

Derivando la última expresión obtenemos:

$$f(x)' = \frac{1}{2}\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{2(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{2(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1-x^2}$$

Si no utilizáramos las propiedades de los logaritmos tendríamos que aplicar la regla de la cadena en la expresión inicial $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ y sería:

$$f(x)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{1+x}{1-x}\frac{-1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{1-x^2}$$

2) $y=\ln(x\tan x)^2=2\ln(x\tan x)=2\ln x+2\ln(\tan x)$

Derivando la última expresión obtenemos: $f(x)'=\frac{2}{x}+2\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}=\frac{2\tan x+2x+2x\tan^2 x}{x\tan x}$

Si no utilizáramos las propiedades de los logaritmos tendríamos que aplicar la regla de la cadena en la expresión inicial $y=\ln(x\tan x)^2$ y sería:

$$f(x)'=\frac{1}{(x\tan x)^2}2(x\tan x)\left(1\cdot\tan x+x\left(1+\tan^2 x\right)\right)=\frac{2\tan x+2x+2x\tan^2 x}{x\tan x}$$

3) $y=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)-\ln\left(x^2\right)=\ln\left(\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\right)-\ln\left(x^2\right)=\frac{1}{3}\ln\left(x^2-1\right)-2\ln x$

Derivando la última expresión obtenemos:

$$f(x)'=\frac{1}{3}\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2}{x}$$

4) $y=\ln\left(2^x sen^2 x\right)=\ln 2^x+\ln\left(sen^2 x\right)=x\ln 2+2\ln(senx)$

Derivando la última expresión obtenemos: $f(x)'=\ln 2+2\frac{1}{sex}\cos x=\ln 2+2\cot x$

Si no utilizáramos las propiedades de los logaritmos tendríamos que aplicar la regla de la cadena en la expresión inicial $y=\ln\left(2^x sen^2 x\right)$ y sería:

$$f(x)'=\frac{1}{2^x sen^2 x}\left(2^x\ln 2sen^2 x+2^x 2senx\cos x\right)=\frac{2^x senx(\ln 2senx+2\cos x)}{2^x sen^2 x}=\frac{\ln 2senx+2\cos x}{senx}=\ln 2+2\cot x$$