RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS QUE NO PODEMOS OLVIDAR

Relaciones fundamentales de la trigonometría

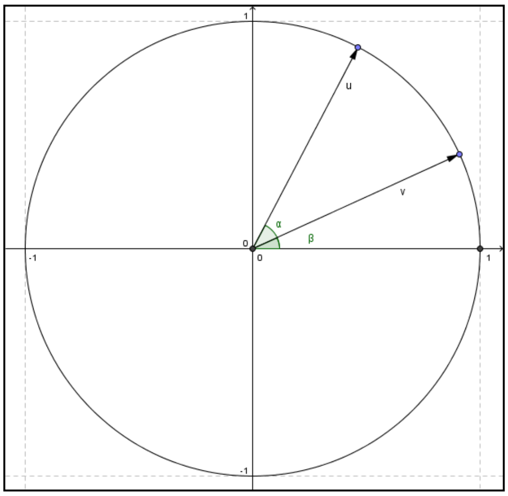
Las tres relaciones fundamentales de la trigonometría pueden resumirse en una, que viene dada por la construcción del triángulo rectángulo de hipotenusa unidad. En este triángulo los catetos son los senos y cosenos de uno de los ángulos que no sea el ángulo recto:

$$\cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \qquad [1]$$

Las otras dos relaciones se obtienen dividiendo la anterior por $\cos^2(x)$ o por $sen^2(x)$ y son:

$$\begin{matrix} tg^2(x) + 1 = \sec^2(x) \\ 1 + \cot^2(x) = \cos ec^2(x) \end{matrix} \qquad [2]$$

Coseno de la diferencia: cos(α – β)



Supongamos que trazamos en la circunferencia de radio unidad los vectores **u** y **v** que forman ángulos α y β respectivamente con respecto al eje x. Si esto es así, entonces el ángulo entre u y v es α – β.

Las coordenadas de los vectores **u** y **v** serán:

u = cos(α)·**i** + sen(α)·**j**
v = cos(β)·**i** + sen(β)·**j**

donde **i** y **j** son la *base canónica*[1] del sistema cartesiano (vectores perpendiculares entre sí y de módulo unidad).

Conociendo las coordenadas de los vectores **u** y **v** podemos calcular su producto escalar de dos formas distintas:

1) utilizando la definición de producto escalar:

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) \qquad [3]$$

donde los módulos de u y v valen 1 ya que son radios de la circunferencia unidad.

2) utilizando las coordenadas de los vectores **u**(cos(α),sen(α)) y **v**(cos(β),sen(β)):

$$u \cdot v = \cos(\alpha)\cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) \qquad [4]$$

[1] La **base canónica** está formada por los vectores cuyas coordenadas contiene un "1" siendo "0" el resto, así **i**(1,0) y **j**(0,1) para el plano constituyen su base canónica. Para el espacio la base canónica está formada por los vectores **i**(1,0,0), **j**(0,1,0) y **k**(0,0,1).
Podemos generalizar esta definición a n dimensiones. Así un espacio n-dimensional tendrá como base canónica un colección de n vectores que irán del $\mathbf{u_1}$(1,0, ... ,0,0) hasta el $\mathbf{u_n}$(0,0, ... ,0,1)

PREGUNTA.- ¿Por qué el producto escalar se puede calcular como la suma de los productos de las coordenadas de los vectores?

Si igualamos las expresiones [3] y [4] obtenemos que:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta)} \qquad [5]$$

Coseno de la suma: cos(α + β)

CONSEJO: Siempre que tengamos que calcular alguna expresión que desconocemos debemos basarnos en otra, u otras, que sí conozcamos. En este caso conviene recordar que ya sabemos calcular el coseno de la resta. Por lo tanto trataremos de convertir la suma de ángulos en resta y utilizar la expresión [5] que calculamos para el coseno de la diferencia:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)+sen(\alpha)sen(-\beta) \qquad [6]$$

Ahora únicamente tenemos que recordar cuál era la relación entre los senos y cosenos de los ángulos negativos con sus correspondientes positivos:

$$\left.\begin{array}{c}\cos(-\beta)=\cos(\beta)\\ sen(-\beta)=-sen(\beta)\end{array}\right. \qquad [7]$$

Sustituyendo las expresiones [7] en la [6] obtenemos:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)} \qquad [8]$$

Seno de la suma: sen(α + β)

Seguimos recordando cosas ya conocidas: ¿cuál es la relación entre senos y cosenos? La relación la dan los ángulos complementarios[2] (los que difieren de 90):

$$\left.\begin{array}{c}\cos(\delta)=sen\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)\\ sen(\delta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta\right)\end{array}\right. \qquad [9]$$

Aplicando las relaciones [9] en la expresión [5] obtenemos:

$$sen(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen(\beta)$$

---

[2] Para *ver* esta relación basta con pintar un triángulo rectángulo y marcar sus ángulos no rectos. Una simple observación nos hará ver que el seno de uno es el coseno de otro, ya que senos y cosenos son los catetos (si la hipotenusa es la unidad). Además la relación entre los dos ángulos que no son rectos es que suman 90 grados o, lo que es lo mismo, son ángulos que difieren de 90.

y volviendo a utilizar las relaciones [9] queda:

$$sen(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(\beta)+sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sen(\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$$

queda: $\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)}$ [10]

Seno de la diferencia: sen(α– β)

Utilizaremos el seno de la suma para calcular el seno de la diferencia:

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha+(-\beta))=sen(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)sen(-\beta) \qquad [11]$$

y utilizando las relaciones [7] en la expresión [11] tenemos:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)sen(\beta)} \qquad [12]$$

Seno del ángulo doble: sen(2α)

Recurrimos a la expresión [10] del seno de la suma haciendo que los dos ángulos sean α:

$$sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)sen(\alpha)$$

queda:

$$\boxed{sen(2\alpha)=2sen(\alpha)\cos(\alpha)} \qquad [13]$$

Coseno del ángulo doble: cos(2α)

Recurrimos a la expresión [8] del coseno de la suma haciendo que los dos ángulos sean α:

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\alpha)-sen(\alpha)sen(\alpha)$$

queda:

$$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)} \qquad [14]$$

Seno y coseno del ángulo mitad: $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **y** $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Para obtener estas relaciones vamos a utilizar una estrategia consistente en sumar o restar dos expresiones. Las expresiones van a ser la ley fundamental de la trigonometría (expresión [1]) y la fórmula del coseno del ángulo doble (expresión [14]) pero ligeramente transformadas:

$$\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1\rightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}=1$$

$$\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\cos(2\alpha)\rightarrow\cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}=\cos(\alpha)$$

Si las sumamos obtenemos:

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}=1 \\
+ & \cos^2\frac{\alpha}{2}-sen^2\frac{\alpha}{2}=\cos(\alpha) \\
\hline
 & 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha
\end{array}
$$

despejando:

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} \qquad [15]$$

Si las restamos (sumamos el opuesto) obtenemos:

$$
\begin{array}{rl}
 & \cos^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}=1 \\
+ & -\cos^2\frac{\alpha}{2}+sen^2\frac{\alpha}{2}=-\cos(\alpha) \\
\hline
 & 2sen^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha
\end{array}
$$

despejando:

$$\boxed{sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} \qquad [16]$$

IMPORTANTE: Estas expresiones serán muy útiles para calcular las integrales del seno y del coseno cuadrado.

Conversión de productos en sumas o restas

Podemos convertir los productos de senos y cosenos en sumas (o restas) utilizando las expresiones [5], [8], [10] y [12] del coseno de la suma y la diferencia y del seno de la suma y la diferencia.

Si sumamos las expresiones del seno de la suma y del seno de la diferencia obtenemos:

$$
\begin{array}{c}
sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta) \\
sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)sen(\beta) \\
\hline
sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen(\alpha)\cos(\beta)
\end{array}
$$

Luego:

$$\boxed{sen(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}sen(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}sen(\alpha-\beta)} \qquad [17]$$

Por ejemplo:

$$sen(5x)\cos(3x)=\frac{1}{2}sen(5x+3x)+\frac{1}{2}sen(5x-3x)=\frac{1}{2}sen(8x)+\frac{1}{2}sen(2x)$$

Si restamos (sumamos el opuesto) las expresiones del seno de la suma y del seno de la diferencia obtenemos:

$$\begin{array}{r} sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta) \\ -\,sen(\alpha-\beta)=-sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta) \\ \hline sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha)sen(\beta) \end{array}$$

Luego:

$$\boxed{\cos(\alpha)sen(\beta)=\frac{1}{2}sen(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}sen(\alpha-\beta)} \qquad [18]$$

Por ejemplo:

$$\cos(5x)sen(3x)=\frac{1}{2}sen(5x+3x)-\frac{1}{2}sen(5x-3x)=\frac{1}{2}sen(8x)-\frac{1}{2}sen(2x)$$

Si sumamos las expresiones del coseno de la suma y del coseno de la diferencia obtenemos:

$$\begin{array}{r} \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+sen(\alpha)sen(\beta) \\ \hline \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{array}$$

Luego:

$$\boxed{\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)} \qquad [19]$$

Por ejemplo:

$$\cos(5x)\cos(3x)=\frac{1}{2}\cos(5x+3x)+\frac{1}{2}\cos(5x-3x)=\frac{1}{2}\cos(8x)+\frac{1}{2}\cos(2x)$$

Si restamos (sumamos el opuesto) las expresiones del coseno de la suma y del coseno de la diferencia obtenemos:

$$\begin{array}{r} \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta) \\ -\cos(\alpha-\beta)=-\cos(\alpha)\cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta) \\ \hline \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2sen(\alpha)sen(\beta) \end{array}$$

Luego:

$$\boxed{sen(\alpha)sen(\beta)=\frac{-1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)} \qquad [20]$$

Por ejemplo:

$$sen(5x)sen(3x)=\frac{-1}{2}\cos(5x+3x)+\frac{1}{2}\cos(5x-3x)=\frac{-1}{2}\cos(8x)+\frac{1}{2}\cos(2x)$$

IMPORTANTE: Estas expresiones serán muy útiles a la hora de integrar funciones que sean producto de trigonométricas, por eso debemos recordarlas. ¿Por qué? Porque a la operación integral le ocurre lo mismo que a la operación derivada. La deriva del producto NO es el producto de las derivadas, sin embargo la derivada de la suma (o resta) SÍ es la suma (o resta) de las derivadas. De la misma forma la integral del producto NO es el producto de las integrales, pero la integral de la suma SÍ es la suma de las integrales. Así, si podemos expresar el producto como una suma (o resta) será mucho más fácil integrarlo.