La Función Gamma de Euler y el factorial

Adrian María Legendre (1752-1833) propuso, en 1814, llamar *Función Gamma* y representar con la letra correspondiente, Γ, a una función que había sido introducida por primera vez en una carta que escribió Leonard Euler (1707-1783) a Christian Goldbach (1690-1764) en el año 1729. Esta función fue descrita inicialmente en forma infinitesimal, como el límite de una expresión discreta. Más tarde se obtuvieron expresiones integrales. La primera de estas integrales fue ya deducida por el mismo Euler, y era:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt}$$

Ésta es una integral impropia que no puede calcularse en términos de funciones elementales.

¿Cuál es su relación con el factorial de un número?

Veamos, lo primero que tenemos que hacer es realizar la integración por partes de la función gamma. Para ello tomaremos:

$u = e^{-t}$, de donde derivando tenemos: $du = -e^{-t}dt$

y $dv = t^{n-1}dt$, de donde integrando tenemos: $v = \frac{t^n}{n}$

y, utilizando la expresión de la integración por partes: $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big]_a^b - \int_a^b v \cdot du$,

obtenemos:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = e^{-t} \frac{t^n}{n}\Bigg]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{t^n}{n}(-e^{-t})dt$$

en esta expresión, utilizando la regla de Barrow, según la cual $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ y utilizando un límite cuando t tiende a infinito para evaluar el extremo impropio, podemos calcular el primer sumando:

$$e^{-t} \frac{t^n}{n}\Bigg]_0^\infty = \lim_{t \to \infty}\left(e^{-t} \frac{t^n}{n}\right) - e^{-0}\frac{0^n}{n} = 0 - 0 = 0$$

Nos queda, entonces:

$$\Gamma(n) = -\int_0^\infty \frac{t^n}{n}(-e^{-t})dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \frac{1}{n}\Gamma(n+1)$$

es decir, hemos obtenido:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}\Gamma(n+1)$$

de donde:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$$

si reiteramos esta relación obtenemos:

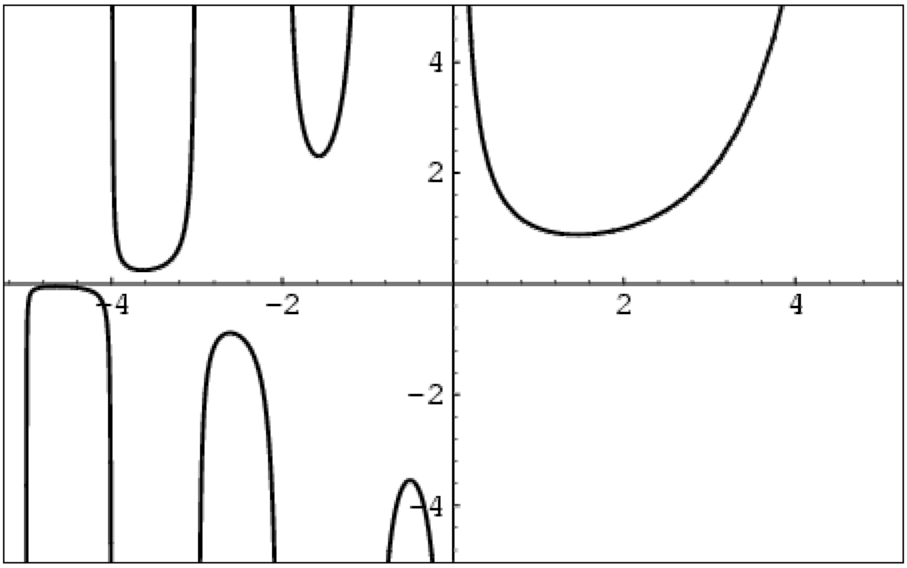
$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

generalizando, hemos obtenido:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

De esta forma, 0! es el valor de $\Gamma(0+1)$, es decir, el valor de $\Gamma(1)$.

Para saber los valores de la función gamma hay que recurrir a tablas, o a su gráfica, que es:



donde podemos ver que el valor correspondiente es 1, es decir:

0! = 1

Bibliografía.-

1.- http://personales.ya.com/casanchi/mat/funciongamma01.htm
2.- http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/EcuacionesDiferenciales/EDO-Geo/edo-cap5-geo/laplace/node10.html